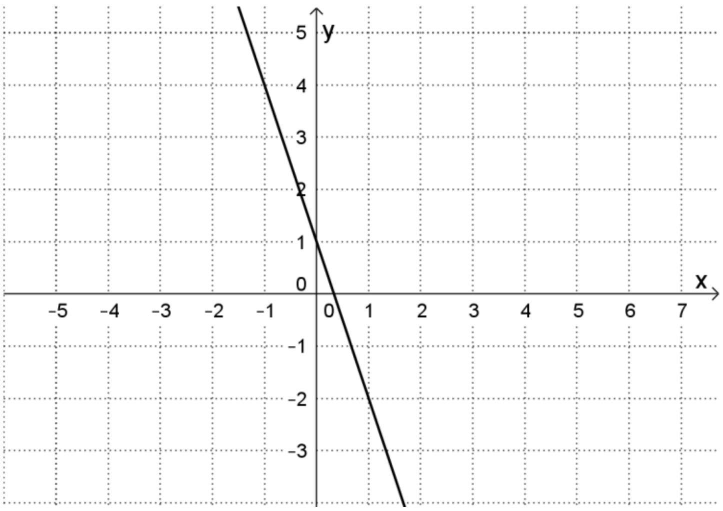
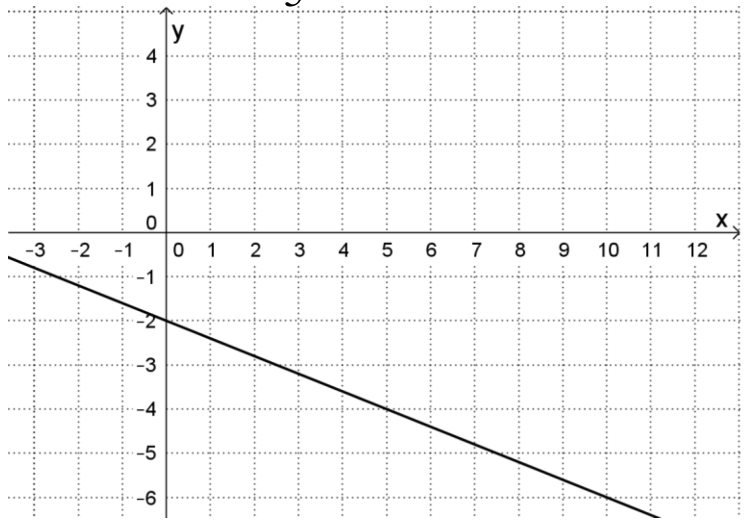
CORRIGÉ DES NOTES ET DES EXERCICES - OPTIMISATION

Pages 3 à 5

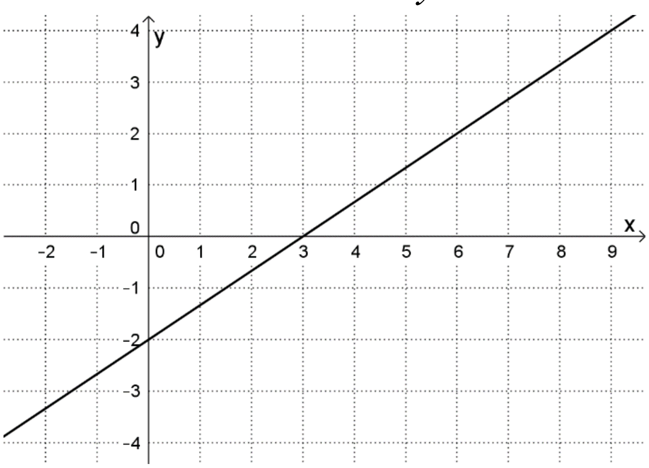
1. $y = -3x + 1$



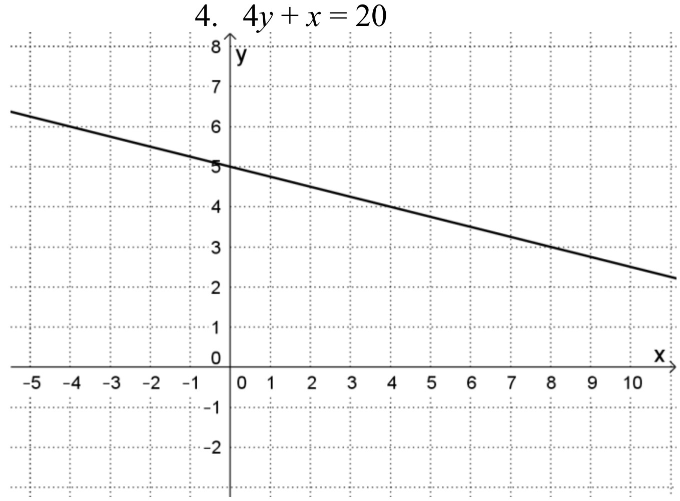
2. $y = -\frac{2}{5}x - 2$



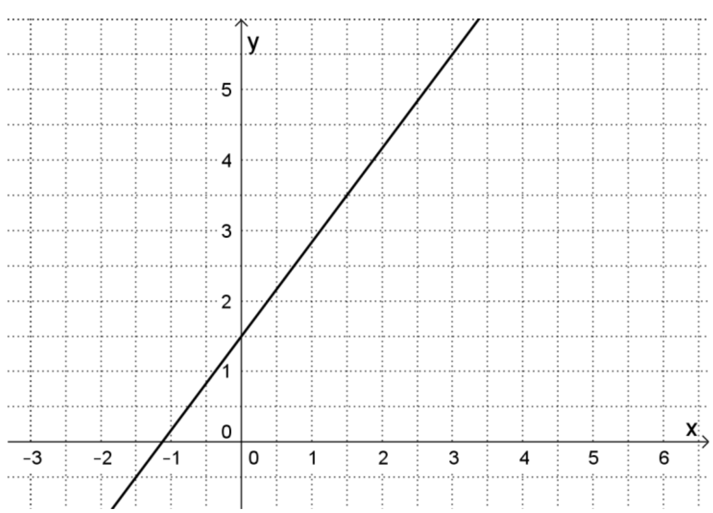
3. $2x - 3y = 6$



4. $4y + x = 20$



5. $y = \frac{4}{3}x + \frac{3}{2}$



Pages 7 à 13

Exercice 1 :

a) $\frac{a^2}{t^2}$ ou $\left(\frac{a}{t}\right)^2$ b) m^2 c) $n-3$ d) $10c$

e) $\frac{7x}{4}$ f) $\frac{x}{28}$ g) $\frac{3}{2}$ h) $\frac{n}{n+1}$

i) $\sqrt{f^2+1}$ j) $\frac{10}{a^2}$ k) $-4n-5$ l) n

Exercice 2 :

a) $\frac{1}{0}$ est impossible b) $\frac{0}{1}$ vaut 0 c) $\frac{0}{0}$ est indéterminé

Exercice 3 :

a) $\frac{27}{b}$ b) $\frac{41}{21}$ c) $\frac{2(x+1)+3x}{x(x+1)}$ ou $\frac{5x+2}{x^2+x}$ d) $\frac{bd}{ad-bc}$ e) $\frac{a+4}{a+1}$

Exercice 4 :

a) $a+6+\frac{9}{a}$ b) $40b^2c$

Exercice 5 :

$$P=-\frac{21}{2}a+\frac{3}{2}$$

Exercice 6 :

a) $x-5$ b) $\frac{a}{b}$ c) $\frac{a+5}{2}$ d) $-21p+6$ e) a^2 f) $a-\sqrt{7}$

Exercice 7 :

a) $\frac{cde+d^2+e^2}{cde}$ b) $3x + 5$

Exercice 8 :

a) $5\left(x-\frac{1}{20}\right)$ b) $\frac{1}{2}(x-4)$ c) $-3\left(x-\frac{4}{3}\right)$ d) $\frac{5}{3}\left(x+\frac{3}{5}\right)$

e) $1.5\left(x+\frac{2}{3}\right)$ f) $\frac{1}{2}(x+1)$ g) $-(x-1)$ h) $\frac{1}{3}(x+6)$

Exercice 9 :

a) $m = -\frac{16}{11}$ b) $x = 10$ c) $x = \frac{29}{33}$ d) $b = 1$

Exercice 10 :

a) $a = \frac{7}{5}$ b) $x=-5$ c) $t = 6$ d) $b = 1$ e) $c = 2$ f) $v=-99$

g) $r=-9$ h) $p = \frac{13}{10}$ i) $x = 32$ j) $x = \frac{18}{7}$ k) $x = \frac{154}{157}$ l) $x = \frac{41}{12}$

DÉFI : m) $t = 3\left(\sqrt{10}-\sqrt{5}\right)$

Page 16

a) (4 , -18) b) $\left(-\frac{19}{2},\frac{19}{2}\right)$ c) (-5 , 16) d) (3 , -1)

e) (16 , -31) f) $\left(-\frac{9}{2},-\frac{5}{2}\right)$ g) (-21 , -13) h) (9 , 11)

i) (4 , 0) j) $\left(\frac{9}{7},16\right)$ k) (-10 , 15) l) (-3 , 9)

m) (-19 , 33) n) $\left(\frac{37}{2},\frac{33}{4}\right)$ o) (8 , 1) p) (24 , 6)

q) (4 , 0) r) $\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$ s) $\left(\frac{27}{2}, 20\right)$ t) (0 , 6)

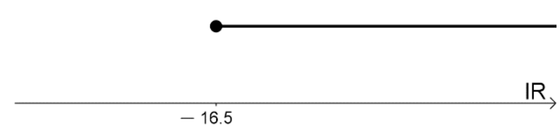
Pages 18 et 19

La valeur de k est 13

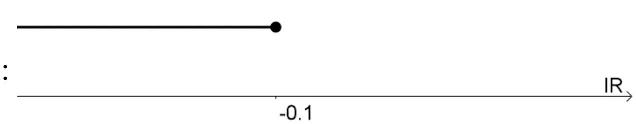
Pages 19 et 20

Exercice 1 :

a) Intervalles : $y \in \left[-\frac{33}{2}, \infty\right[$ Graphiquement :



b) Intervalles : $x \in \left]-\infty, -\frac{1}{10}\right]$ Graphiquement :

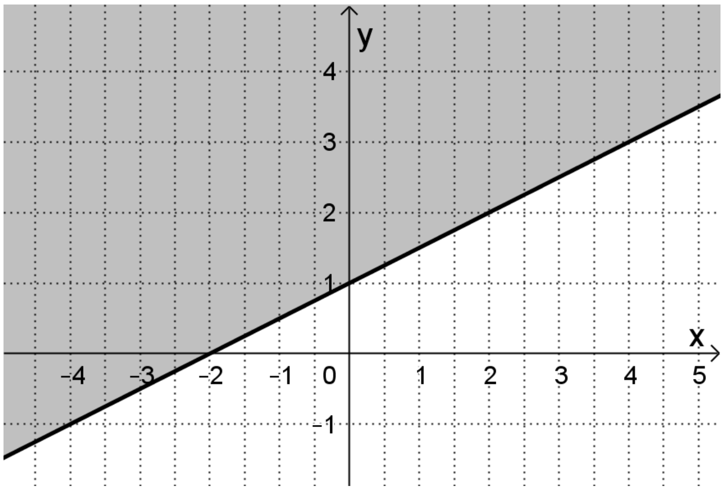


Exercice 2 :

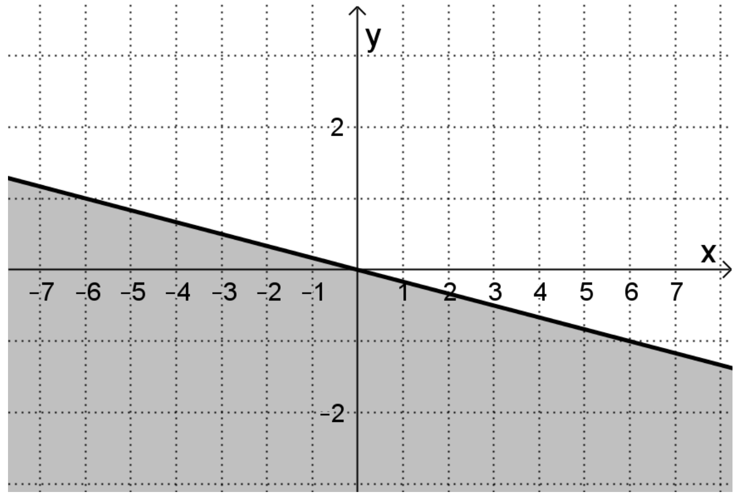
a) 23 , 25 , 27 , 29 b) 200 cm c) 18 , 20 , 22 d) – 51 e) 4

Page 23

a) $y \geq 0,5x + 1$



b) $y \leq -\dfrac{x}{6}$



Pages 27 et 28

Exercice 2 : $y \in \{44, 45, 46, \ldots, 67, 68\}$

Exercice 3 :

a) Le système est : 1. $x \geq 1$ 2. $y \geq \dfrac{1}{4}x$ 3. $y \leq -\dfrac{1}{2}x + 4$

b) A $(1\ , \dfrac{7}{2})$ B $(1, \dfrac{1}{4})$ C $(\dfrac{16}{3}, \dfrac{4}{3})$

c) Le sommet (4 , 1) maximise la fonction Z.

Page 29

Sa commission maximale est de 19$

Pages 30 à 33

Problème 1 :

a) 45 contenants de 1L et 15 contenants de 3L

b) 660\$-440\$ = 220\$

c) 1100\$

Problème 2 :

a) 60 lavages partiels et 30 complets

b) Son profit augmente de 10\$

<u>Page 35</u>

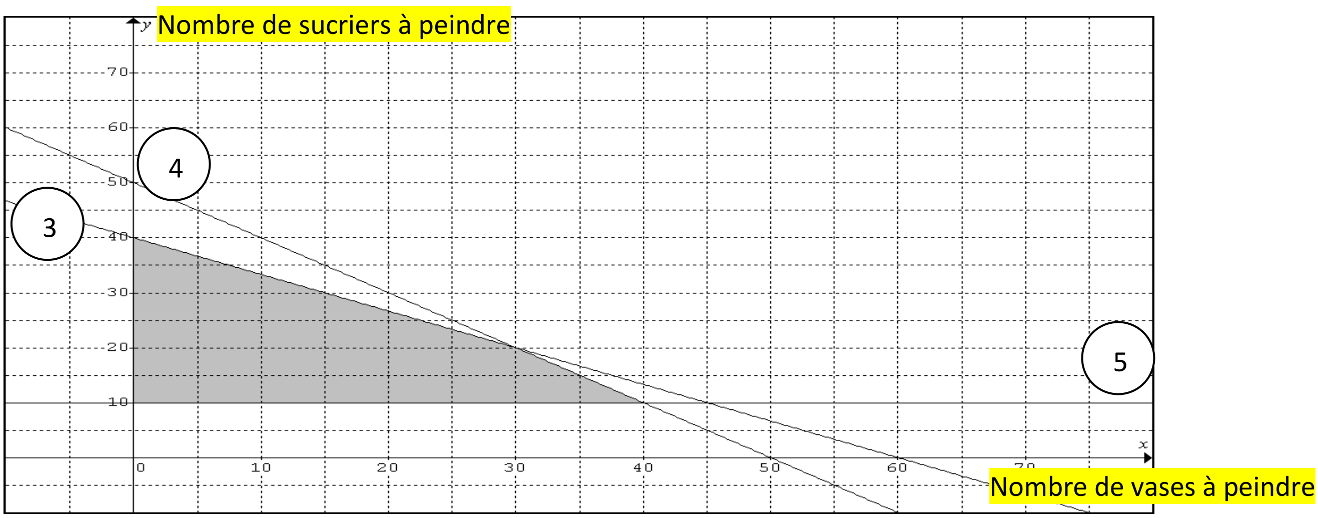
LES JEUNES ENTREPRENEURS

a) : Nombre de vases à peindre y : Nombre de sucriers à peindre

b) 1. $x \geq 0$ 2. $y \geq 0$ 3. $2x + 3y \leq 120$ 4. $x + y \leq 50$ 5. $y \geq 10$

c) <u>Règle de l'objectif</u> : P = $14x + 10y$

d) <u>Polygone de contraintes :</u>



e) <u>Tableau des sommets</u>

Coordonnées des sommets	**Fonction :** P = 14x + 10y	**Valeur de la fonction**
(0 , 10)	P = 10 (10)	100
(0 , 40)	P = 10 (40)	400
(30 , 20)	P = 14 (30) + 10 (20)	620
(40 , 10)	P = 14 (40) + 10(10)	660

f) Cynthia doit peindre 40 vases et 10 sucriers si elle désire maximiser ses profits.

Page 38

Exercice 1 :

a) $\frac{-4}{5}$

b) $\frac{T+24}{5}$

c) Le maximum de la fonction T est 1156 et 9 couples maximisent T dont les couples : (45 , 200) ; (50 , 196) ; (55 , 192) ; (60 , 188)…

Exercice 2 :

Soit *x :* nombre de vélos vendus *y* : nombre de trottinettes vendues

P = 350*x* + 110*y* - (200*x* + 60*y* + 500 + 1071)

P = 150*x* + 50*y* – 1571 (réponse finale simplifiée)

Exercice 3 :

33 couples maximisent la fonction : $\left|\frac{264-40}{7}\right|+1=33$ couples

(Plusieurs couples différents peuvent être énumérés)

Exercice 4 : Z = 5*x* + *y*

Exercice 5 : 36 couples

Page 40

Exercice 6 : *r* = 2 et *t* = 3

Exercice 7 :

a) $$P=700x+400y-(300x+200y+35x+35y)$$

ou

$$P=365x+165y$$ (une fois réduit)

b) $$P=150x+90y-(60x+42{,}3y)-0.05(150x+90y)$$

ou

$$P=82{,}5x+43{,}2y$$ (une fois réduit)

Pages 41 à 43

Vrai ou faux?

a) Faux

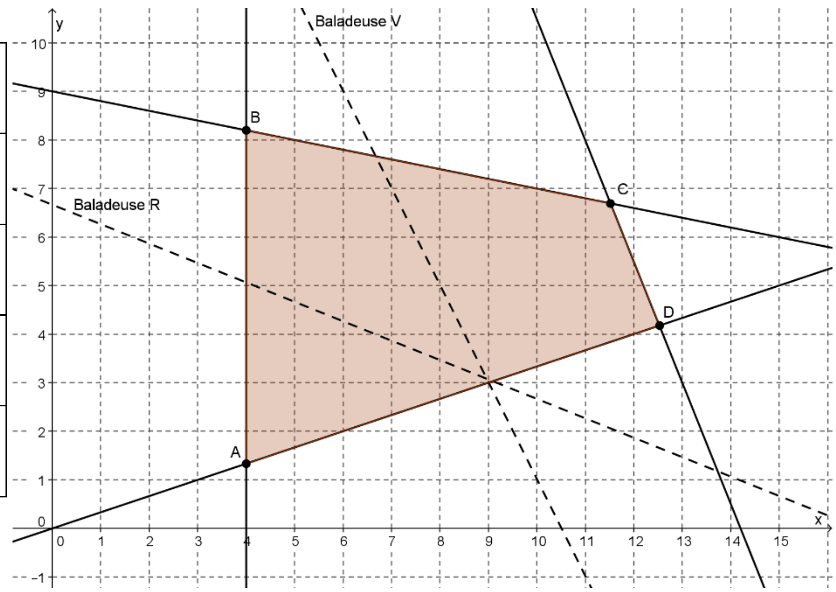
b) Faux

c) Faux

POUR LES AS #1!!

Voici un début de résolution…

SOMMETS	VALEURS DES FONCTIONS
A $\left(4, \frac{4}{3}\right)$	R = 2,93 V = 9,33
B $(4 ; 8{,}2)$	R = 9,8 V = 16,2
C $(11{,}52 ; 6{,}7)$	R = 11,3 V = 29,74
D $(12{,}53 ; 4{,}18)$	R = 9,19 V = 29,24



Réponses finales : ???

POUR LES AS #2!!

L'usine devrait recevoir 210 appareils réparables et 140 appareils défectueux pour maximiser ses bénéfices hebdomadaires.

Exercice 1 :

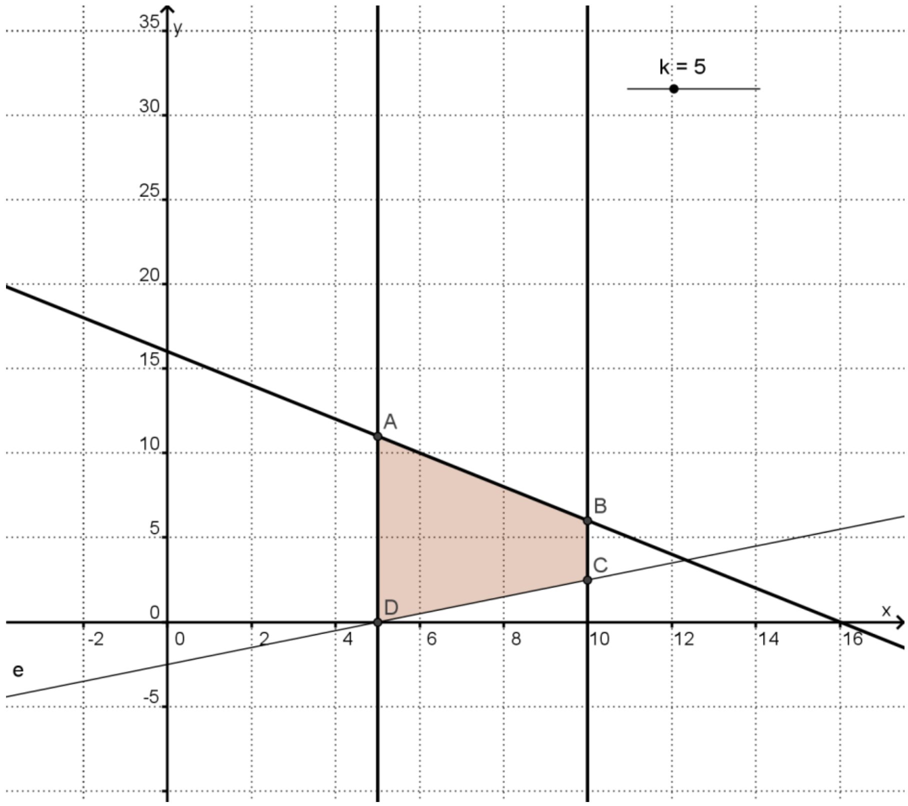
a) $a > \frac{3}{2}$

b) $0 < a < \frac{3}{2}$

c) 19 couples

Page 44 (Solutionnaire détaillé)

Exercice 2 :



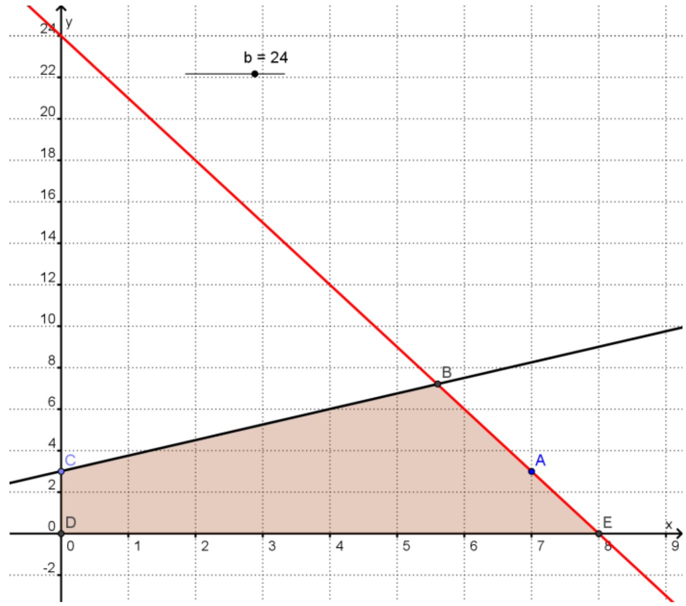
Isolons y dans la 4^e inéquation : $x-2y \leq k \Leftrightarrow x-k \leq 2y \Leftrightarrow y \geq \frac{x-k}{2}$

Pente de la droite *e* : $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{2}$

Si la droite *e* passe par D(5, 0), alors l'ensemble solution est entièrement dans le 1er quadrant.

Donc $y = \frac{x-k}{2} \Leftrightarrow 0 = \frac{5-k}{2} \Leftrightarrow k = 5$

3. a) La constante b est l'ordonnée à l'origine de la 4^e contrainte. Si A(7, 3) est une solution du système d'inéquations, il est situé soit sur un côté du polygone, soit à l'intérieur du polygone. On cherche donc la valeur de b tel que la droite frontière associée à la 4^e contrainte passe par A(7, 3).



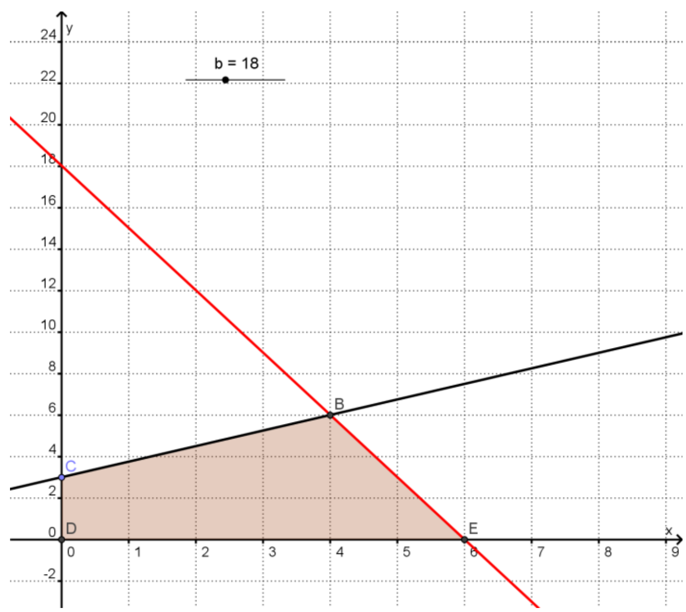
$$y = -3x + b \Rightarrow 3 = -3\times 7 + b$$

$$\Rightarrow b = 24$$

Et si la valeur de b augmente, le point A(7, 3) sera à l'intérieur du polygone, donc les valeurs possible de b sont :

$b \geq 24$ ou $b \in [24, +\infty$

3. b) On cherche à résoudre un système d'équations :



$$\begin{cases} y = \frac{3}{4}x + 3 \\ y = -3x + b \end{cases}$$

mais on impose $x = 4$.

On a donc :

$$\begin{cases} y = \frac{3}{4}\times 4 + 3 \\ y = -3\times 4 + b \end{cases}$$

Méthode de comparaison :

$$\frac{3}{4}\times 4 + 3 = -3\times 4 + b \Leftrightarrow b = \frac{3}{4}\times 4 + 3 + 3\times 4 \Leftrightarrow b = 18$$

4. Déterminer le point d'intersection des droites $y=5x+3$ et $x+y=2$:

$$\begin{cases} y=5x+3 \\ x+y=2 \end{cases} \Rightarrow x+(5x+3)=2 \Rightarrow 6x+3=2 \Rightarrow x=\frac{-1}{6} \Rightarrow y=\frac{13}{6}$$

Déterminer l'équation de la droite passant par B et C :

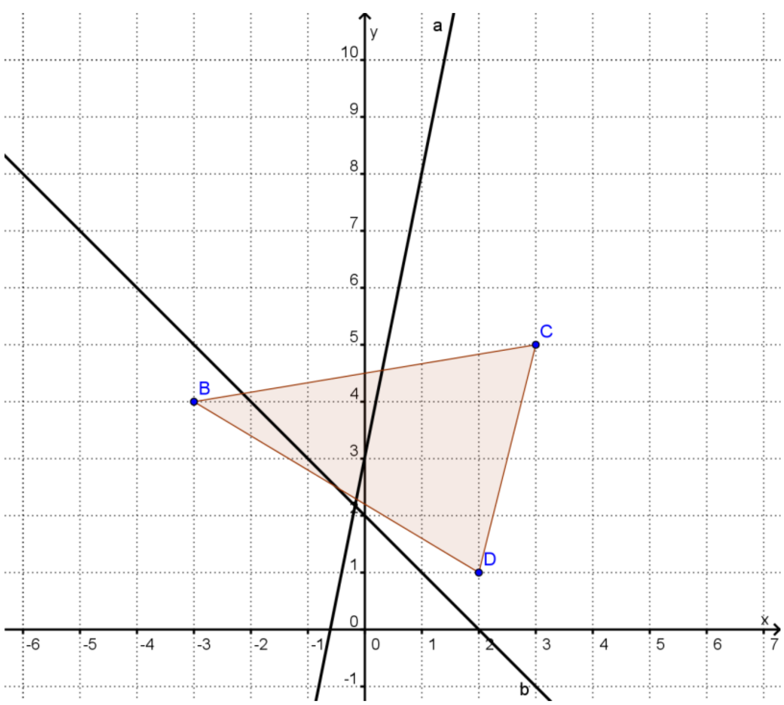
$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{5-4}{3-(-3)}=\frac{1}{6} \quad y=\frac{1}{6}x+b \quad 5=\frac{1}{6}\times 3+b \quad b=\frac{9}{2} \text{ donc } y=\frac{1}{6}x+\frac{9}{2}$$

Déterminer l'équation de la droite passant par C et D :

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{5-1}{3-2}=\frac{4}{1} \quad y=4x+b \quad 5=4\times 3+b \quad b=-7 \text{ donc } y=4x-7$$

Déterminer l'équation de la droite passant par B et D :

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{4-1}{-3-2}=\frac{3}{-5} \quad y=\frac{-3}{5}x+b \quad 1=\frac{-3}{5}\times 2+b \quad b=\frac{11}{5} \text{ donc } y=\frac{-3}{5}x+\frac{11}{5}$$



Systèmes d'inéquations :

$$\begin{cases} y\leq\frac{1}{6}x+\frac{9}{2} & (1) \\ y\geq 4x-7 & (2) \\ y\geq\frac{-3}{5}x+\frac{11}{5} & (3) \end{cases}$$

L'inéquation (3) est fausse avec le couple $\left(\frac{-1}{6},\frac{13}{6}\right)$.

Graphiquement et **algébriquement**, on constate que le point d'intersection des droites n'est pas à l'intérieur du polygone de contraintes.

5. Déterminer le point d'intersection des droites $2y = ax + b$ et $y = 2x + 1$:

$$\begin{cases} 2y = ax + b \\ y = 2x + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{ax+b}{2} \\ y = 2x + 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{ax+b}{2} = 2x+1$$

$$ax + b = 4x + 2$$

$$b - 2 = 4x - ax$$

$$b - 2 = x(4 - a)$$

$$\frac{b-2}{4-a} = x$$

$$y = 2\left(\frac{b-2}{4-a}\right) + 1 = \frac{2b-4}{4-a} + 1 = \frac{2b-4+4-a}{4-a} = \frac{2b-a}{4-a}$$

Déterminer la valeur de la fonction à optimiser en ce point d'intersection :

$$R = 3x + 2y = 3\left(\frac{b-2}{4-a}\right) + 2\left(\frac{2b-a}{4-a}\right) = \frac{3b-6}{4-a} + \frac{4b-2a}{4-a} = \frac{-2a+7b-6}{4-a}$$

Pages 46 à 51

Exercice 1:

a) $3p < 4$ b) $3p \geq 4$ c) $4p > 5$ d) $4p \leq 5$

Exercice 2:

a) $x > 10$ b) $x \leq 10$ c) $\frac{x}{2} < 5$ d) $\frac{x}{2} \geq 5$

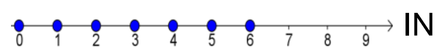
Exercice 3:

a) $2(w + 500) \geq 7000$ b) $2(w + 500) < 7000$

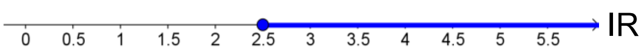
c) $3(w + 600) > 9000$ d) $3(w + 600) \leq 9000$

Exercice 4:

a) $y \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ou $\{y \in \mathrm{IN} \mid y \leq 6\}$ ou



b) $\{x \in \mathrm{IR} \mid x \geq 2{,}5\}$ ou $x \in [2{,}5; +\infty$ ou



Exercice 5:

a) équivalentes b) non équivalentes c) non équivalentes d) non équivalentes

Exercice 6:

a) $\geq$ b) $\geq$ c) 1. $\geq$ et 2. $\leq$ d) 1. $\geq$ et 2. $\leq$

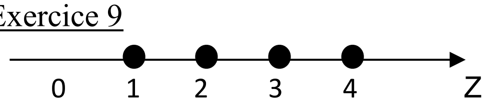
Exercice 7:

a) dans IN : $x \in \{0, 1, 2, 3\}$ et dans IR : $x \in -\infty, 3]$
b) dans IN : $x \in \varnothing$ et dans IR : $x \in -\infty, -2[$
c) dans IN : $x \in$ IN et dans IR : $x \in [-3, +\infty$
d) dans IN : $x \in \{4, 5, 6, \ldots\}$ et dans IR : $x \in]3, +\infty$

Exercice 8:

a) $x \in [-1, \infty$ b) $x \in [\frac{1}{3}, \infty$ c) $x \in -\infty, \frac{18}{11}]$ d) $x \in -\infty, \frac{9}{4}[$

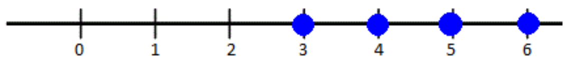
Exercice 9



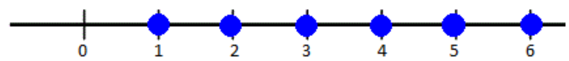
$x \in \{1, 2, 3, 4 \ldots\}$

Exercice 10:

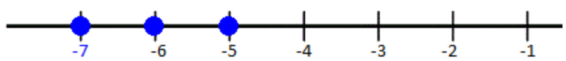
a) $x > \frac{5}{2}$



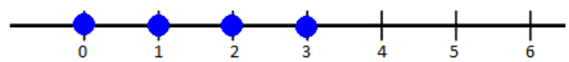
b) $x \geq 1$



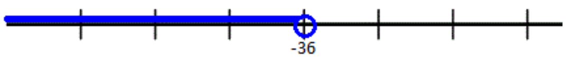
c) $x < -4$



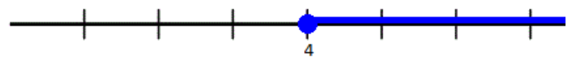
d) $x \leq \frac{7}{2}$



e) $x < -36$



f) $x \geq 4$



Pages 52 et 53

Exercice 1:

a) i) $x - y < 3$ ii) $x - y > 3$ iii) $x - y \leq 3$ iv) $x - y \geq 3$

b) i) $2r + 3c > 10$ ii) $2r + 3c < 10$ iii) $2r + 3c \leq 10$ iv) $2r + 3c \geq 10$

c) i) $mn \leq 1200$ ii) $mn \geq 1200$ iii) $mn > 1200$ iv) $mn < 1200$

Exercice 2:

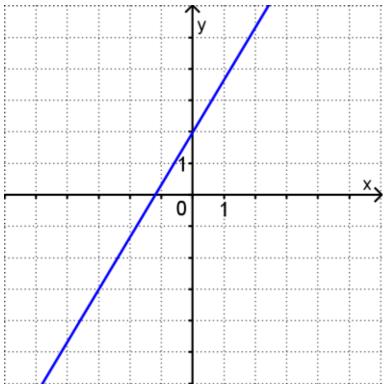
a) $x < 10$ b) $y \leq 20$ c) $z \leq 25$ d) $x \geq 30$ e) $z \leq y/2$

f) $9{,}5y \geq 120$ g) $11z > 130$ h) $12x \leq 224$ i) $12x > 19y$ j) $9{,}5y + 11z < 425$

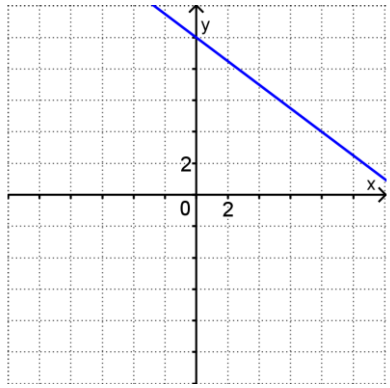
Pages 54 et 55

Exercice 1:

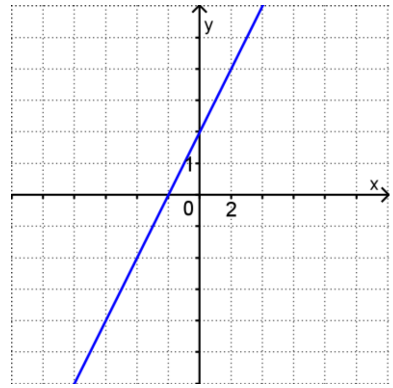
a) $y=\dfrac{5x}{3}+2$



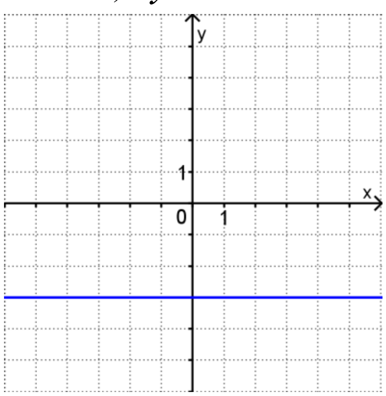
b) $y=\dfrac{-3x}{4}+10$



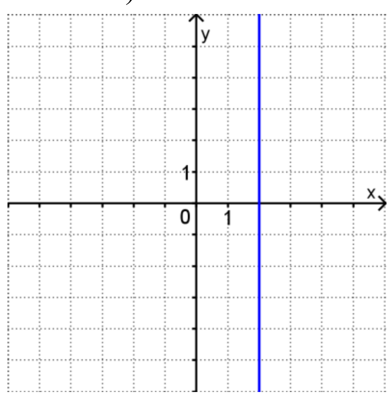
c) $y=2+x$



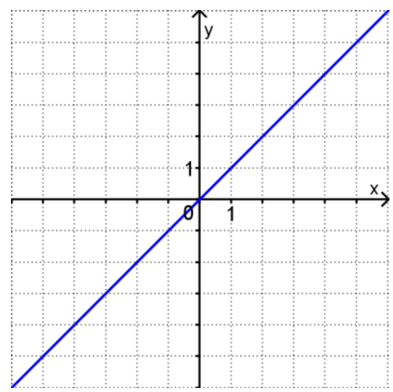
d) $y=-3$



e) $x=2$



f) $y=x$

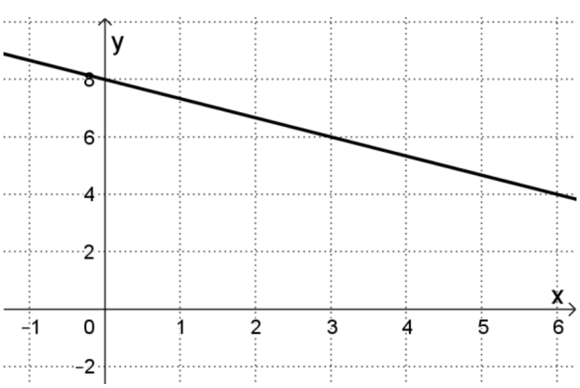


► L'équation de l'axe des ordonnées est : $x = 0$

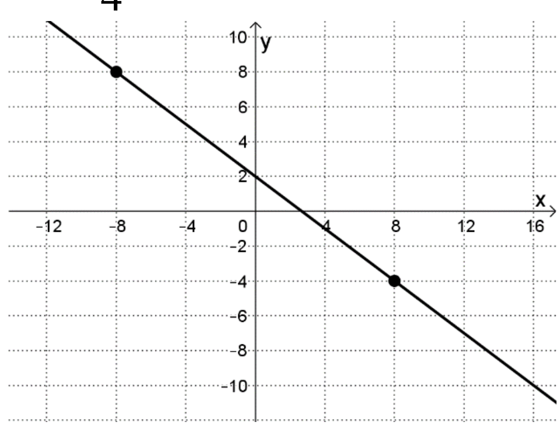
► L'équation de l'axe des abscisses est : $y = 0$

Exercice 2:

a) $2x+3y=24$



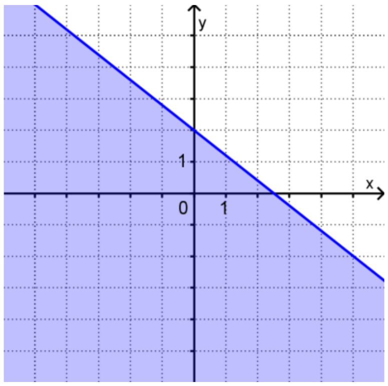
b) $y=\dfrac{-3}{4}x+2$



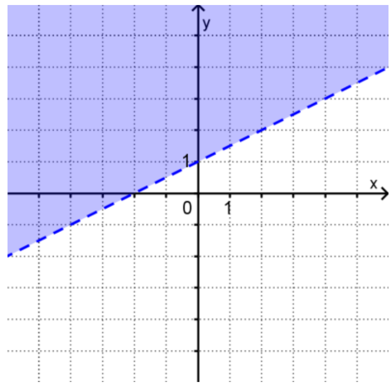
Pages 55 et 56

Exercice 1:

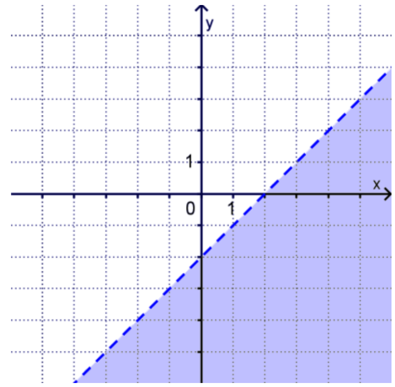
a) $4x+5y\leq 10$



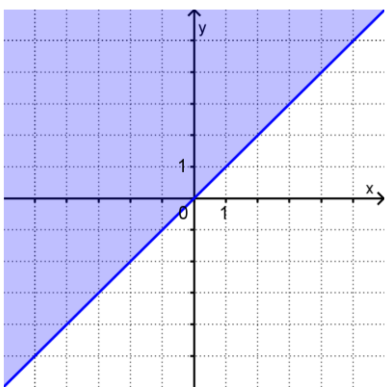
b) $2y>2+x$



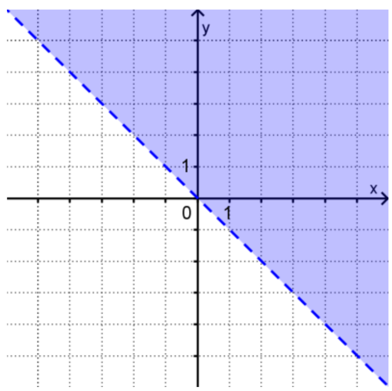
c) $y<x-2$



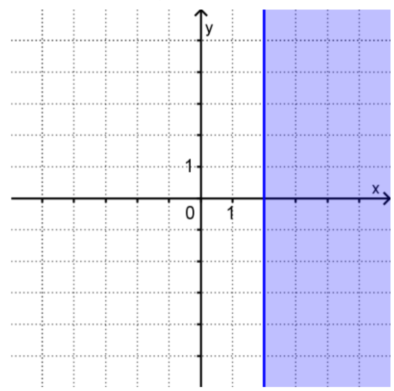
d) $y\geq x$



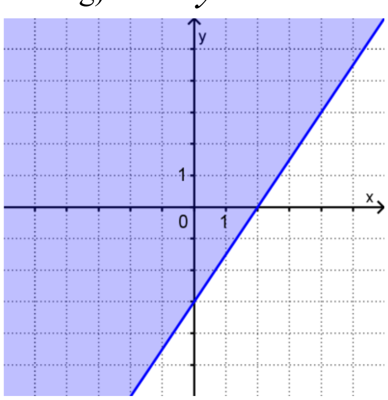
e) $x+y>0$



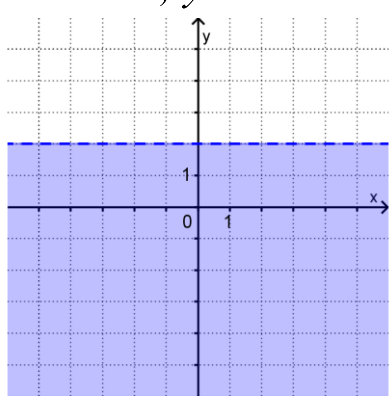
f) $x\geq 2$



g) $3x-2y-6\leq 0$



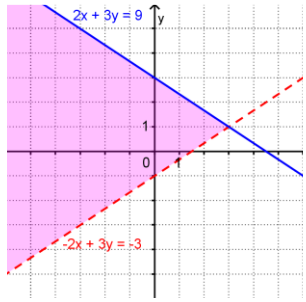
h) $y<2$



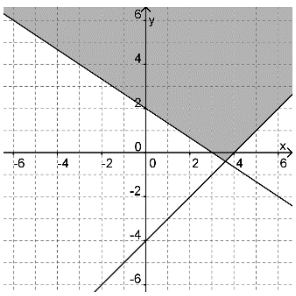
Pages 57 à 59

Exercice 1:

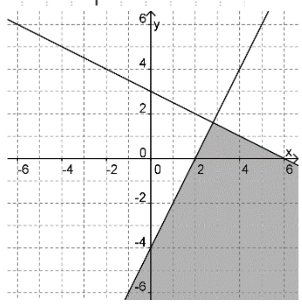
a) $\begin{cases} 2x+3y\leq 9 \\ 3y+3>2x \end{cases}$



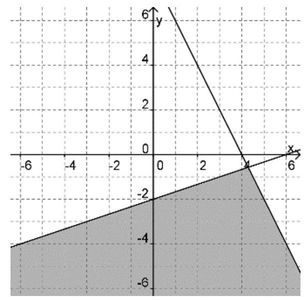
b)



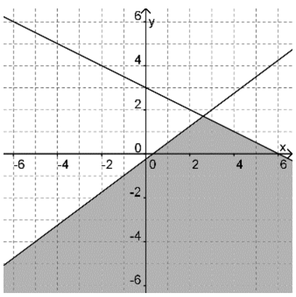
c)



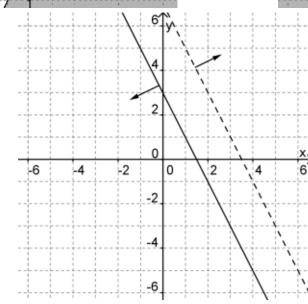
d)



e)



f)



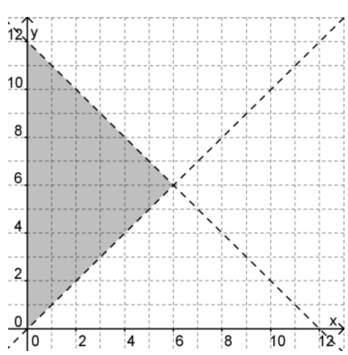
E.S. = $\varnothing$

Exercice 2:

Soit x : largeur du rectangle (cm)

y : longueur du rectangle (cm)

On a donc $\begin{cases} x>0 \\ y>0 \\ y>x \\ 2x+2y<24 \end{cases}$

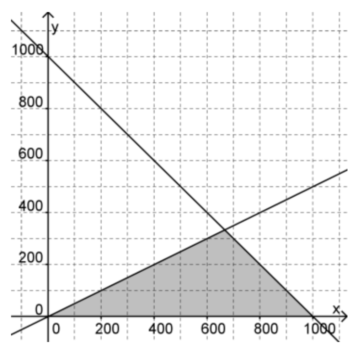


b)

Soit x : nombre d'élèves

y : nombre d'autres participants

On a donc $\begin{cases} x\geq 0 \\ y\geq 0 \\ x\geq 2y \\ x+y\leq 1000 \end{cases}$



Exercice 3:

a) IR^*_+ car ce sont des mesures.

b) IN car ce sont des individus.

Page 60

Exercice 1:

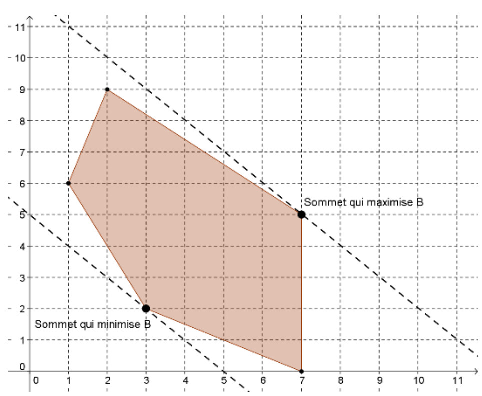
a) Soit x : nombre de pages de texte
y : nombre de pages de texte et de graphiques
Objectif poursuivi : Marc-Antoine désire maximiser son revenu.
Règle : R = $2{,}50x + 4y$

b) Soit x : nombre de jours de vacances au Québec
y : nombre de jours de vacances aux États-Unis
Objectif poursuivi : Ils désirent minimiser le cout de leurs vacances.
Règle : C = $80x + 150y + 160$

Page 61

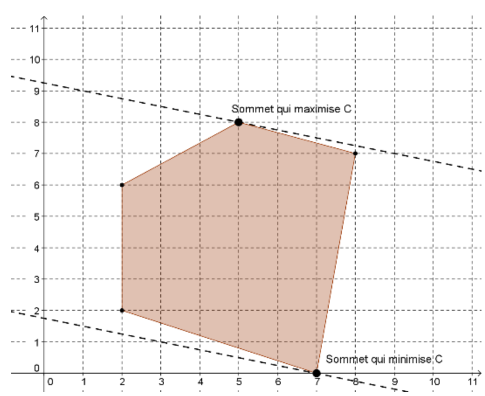
Exercice :

a) $B = x + y$



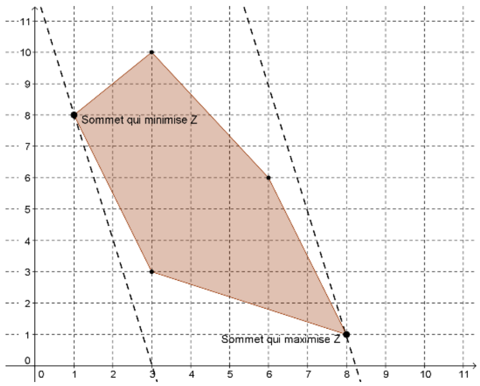
$B_{max} = 12$ et $B_{min} = 5$

b) $C = x + 4y$



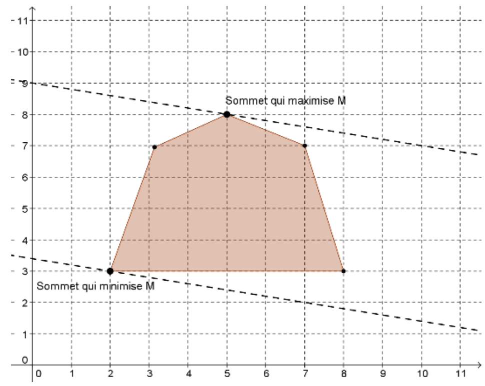
$C_{max} = 37$ et $C_{min} = 7$

c) Z = 12x + 3y



$Z_{max} = 99$ et $Z_{min} = 36$

d) M = x + 5y



$M_{max} = 45$ et $M_{min} = 17$

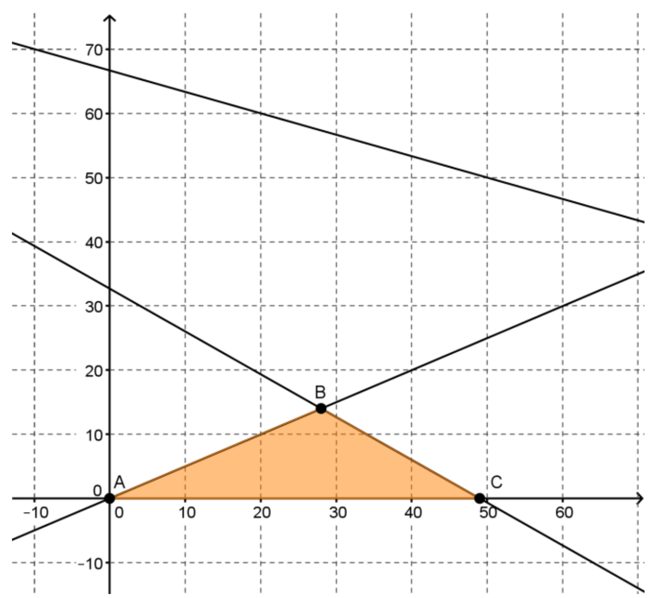
Pages 62 à 65

Problème 1:

x : nombre d'hélices

y : nombre de systèmes d'engrenages

$$\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ 2x + 3y \leq 98 \\ x + 3y \leq 200 \\ x \geq 2y \end{cases}$$



$R = 800x + 3000y$ **à maximiser**

Le sommet B(28, 14) engendre le revenu maximal.

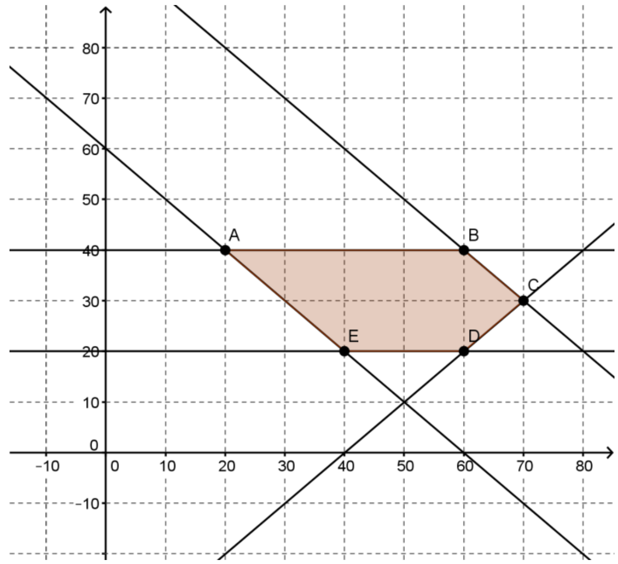
► L'atelier doit vendre 28 hélices et 14 systèmes d'engrenages pour un revenu de 64 400$.

Problème 2:

x : nombre d'heures en catamaran
y : nombre d'heures en voilier

$$\begin{cases} x \ge 0, y \ge 0 \\ x \le y + 40 \\ y \ge 20 \\ y \le 40 \\ x + y \ge 60 \\ x + y \le 100 \end{cases}$$

$R = 4x + 7y$ **à maximiser**



Le sommet B(60, 40) engendre le revenu maximal.

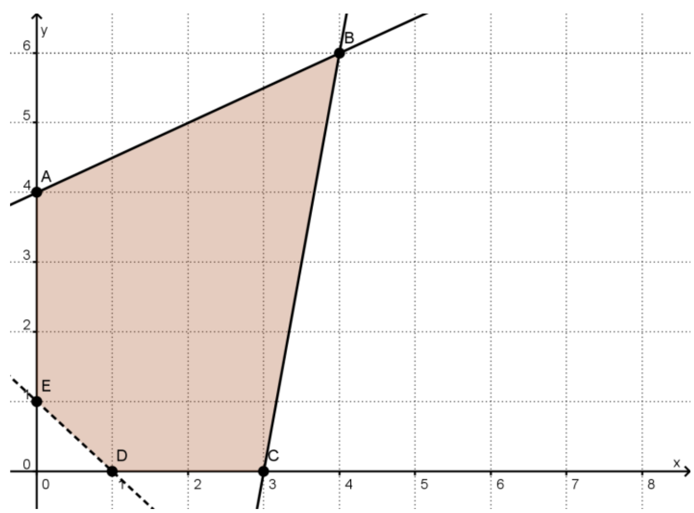
► À chaque mois, Monsieur Arvizet doit travailler 60 heures en catamaran et 40 heures en voilier pour un revenu maximal de 520$.

Problème 3:

x : nombre de cases noires
y : nombre de cases rouges

$$\begin{cases} x \ge 0, y \ge 0 \\ y - \dfrac{x}{2} \le 4 \\ x - \dfrac{y}{6} \le 3 \\ x + y > 1 \end{cases}$$

$S = 10x + 5y$ **à maximiser**



Le sommet B(4, 6) engendre la somme d'argent pariée maximale.

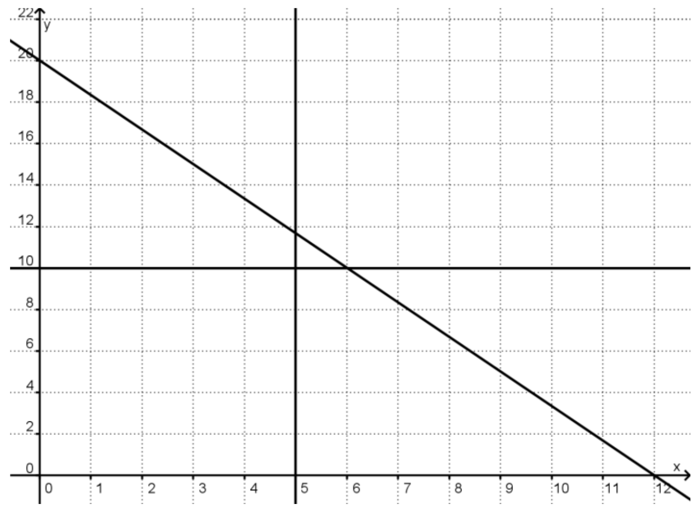
► Alain a parié un maximum de 70$ en plaçant 4 jetons sur des cases noires et 6 jetons sur des cases rouges.

Problème 4:

x : nombre d'autobus du modèle A
y : nombre d'autobus du modèle B

$$\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ 20x + 12y \geq 240 \\ x \leq 5 \\ y \leq 10 \end{cases}$$

$C = 200x + 100y$ **à minimiser**



L'ensemble solution du système est l'ensemble vide (E.S. = $\varnothing$).

► Il est impossible de transporter les 240 personnes selon les restrictions données.

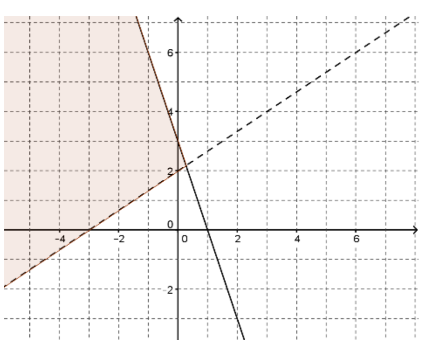
Pages 66 à 73-

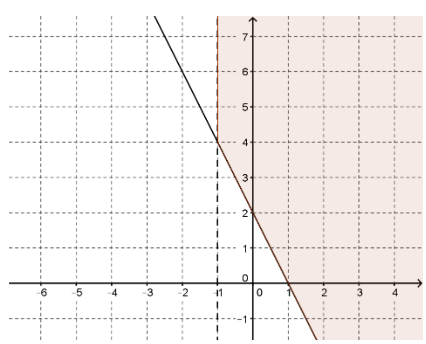
Exercice 1 :

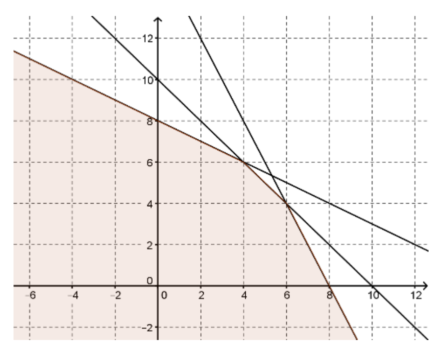
a) $\begin{cases} x \leq -\dfrac{y}{3} + 1 \\ y > \dfrac{2x}{3} + 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + y \geq 2 \\ 2x + 7 > 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y \leq -x + 10 \\ y \leq -2x + 16 \\ y \leq -\dfrac{x}{2} + 8 \end{cases}$







Exercice 2 : $x \leq 4$ ou $x \in \left]-\infty, 4\right]$

<u>Exercice 3</u> :

a) 6 b) 8 c) 4 d) 5 e) 1 f) 9
g) 3 h) 10 i) 7 j) 2

<u>Exercice 4</u> :

Le système d'inéquations est :

$y \geq 0$ $y \leq \frac{3x}{2}+1$ $y \geq -x+1$ $y \leq \frac{-x}{2}+5$ $y < -3x+15$

<u>Exercice 5</u> :

Situation 1 :

a) Variables :
x : Nombre de mètres cubes du produit A
y : Nombre de mètres cubes du produit B

Contraintes : $x \geq 0$ $y \geq 0$ $x \leq 15($ $y \leq 15($ $3x \geq 50($ $2y \geq 50($ $x+y \leq 45($

b) Fonction à optimiser :
C = $6x + 5y$

Situation 2 :

a) Variables :
x : Nombre de jupes
y : Nombre de robes

b) Contraintes :

$x \geq 0$ $y \geq 0$ $x+3y \leq 10($ $x+1,5y \leq 6($

c) Fonction à optimiser : P = $17x + 50y$

<u>Exercice 6</u> :

a) Les coordonnées des sommets sont :

A(0,5) B(1,5) C(3,4 D(7,0) E(0,0)

b) Le couple maximisant la fonction Z est (3,4). Le maximum est de 25 unités.

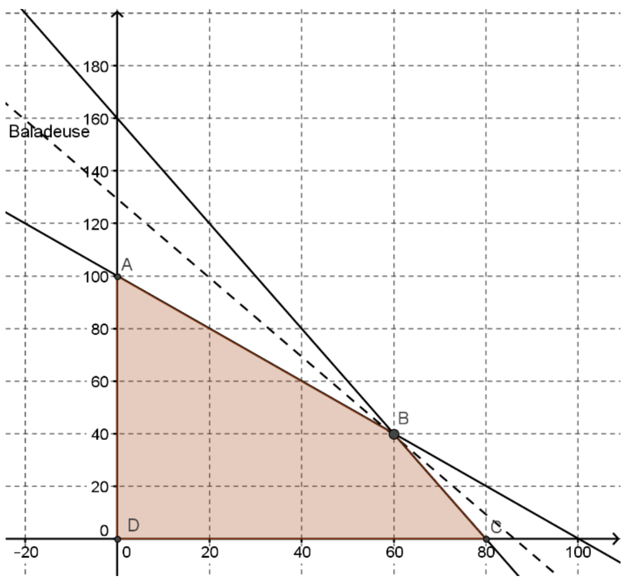
Exercice 7 :
Variables :

x : Nombre de litres de jus de citron.
y : Nombre de litres de jus d'orange.

Contraintes :

$x \geq 0$ $\quad$ $y \geq 0$ $\quad$ $x + y \leq 100$ $\quad$ $6x + 3y \leq 480$

Polygone de contraintes :



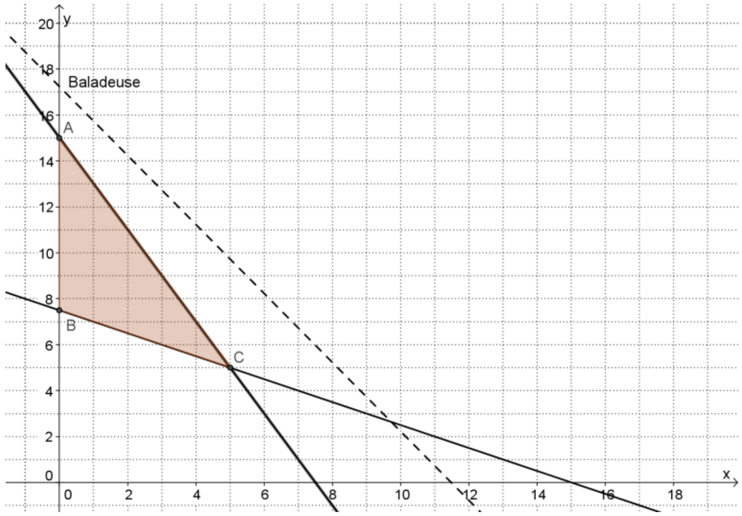
Règle de l'objectif :

P = 0,75x + 0,5y

Réponse : Léo doit produire 60 litres de jus de citron et 40 litres de jus d'orange pour un profit maximal de 65$.

Exercice 8 :
La pente de la droite baladeuse est -3. Il faut utiliser d1
Le point B minimise P.
Le point C maximise P.

Exercice 9 :



La pente de la droite baladeuse est de $\frac{-3}{2}$.

Le sommet qui maximise la fonction C est A(0 , 15) avec C = 30$.

Exercice 10 :

Variables :

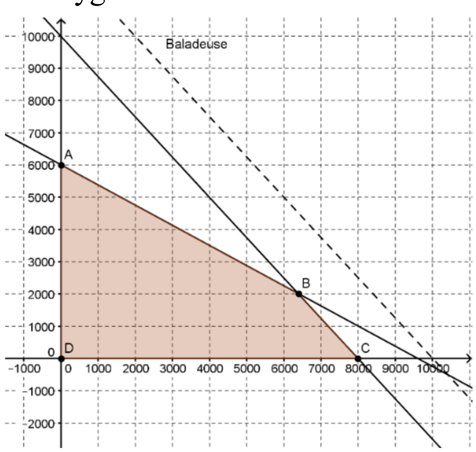
x : Nombre de pastilles rouges.

y : Nombre de pastilles vertes.

Contraintes :

$x \geq 0$ $y \geq 0$ $0{,}5x + 0{,}8y \leq 4800$ $10x + 8y \leq 80000$

Polygone de contraintes :



Règle de l'objectif :

P = 0,1x + 0,08y

Le segment BC a le même taux de variation que la droite baladeuse : $\frac{-5}{4}$

Tous les couples à coordonnées entières sur le segment BC sont des solutions du problème.

x	6400	6404	6408	6412	…	8000
y	2000	1995	1990	1985	…	0

À chacun de ces couples, la fonction P vaut 800$.