LE FOND DE SCÈNE

Pour un spectacle multimédias, on veut monter différents éléments de décors. On a transposé le plan du fond de scène dans un plan cartésien gradué en mètres. L'axe des x représente le plancher de la scène et l'origine du plan est le milieu de ce plancher. On ne tiendra donc compte que des points dont les ordonnées sont positives.

On retrouve les éléments suivants :

A - Un demi-cercle de lumière, centré à l'origine et de rayon 10 m.

B - Un drapé de velours qui suit le tracé d'une parabole ayant son sommet à l'origine et dont le foyer est le point (0, 9/8).

C - Une banderole représentée par la branche positive d'une hyperbole de centre (0, 0), dont l'un des sommets est le point (0, 3) et dont l'un des foyers est le point (0, 5).

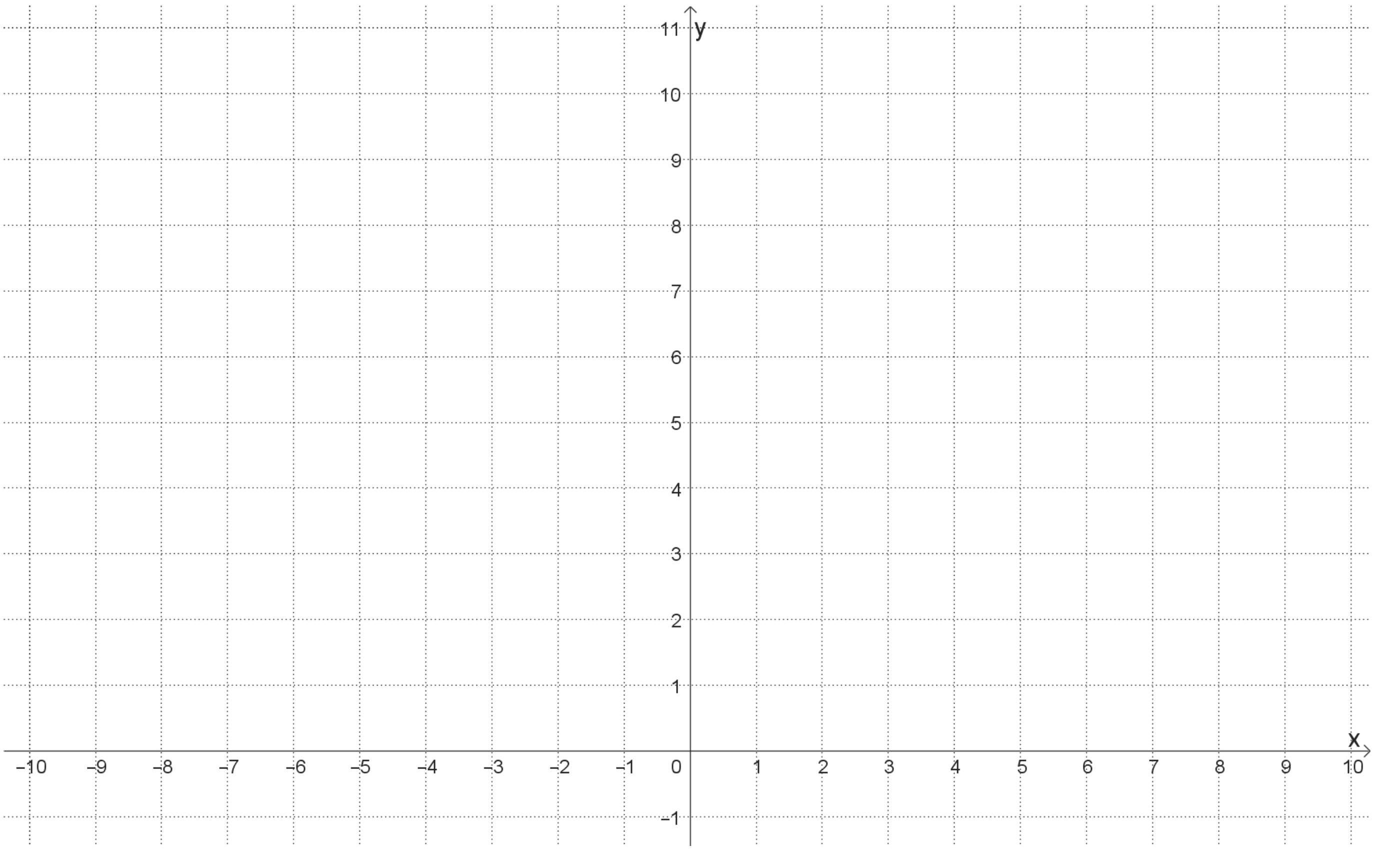
D - Une bande métallique de pente 1 et d'ordonnée à l'origine 0,75.

E et F sont les deux points d'intersection du cercle A et de la parabole B.

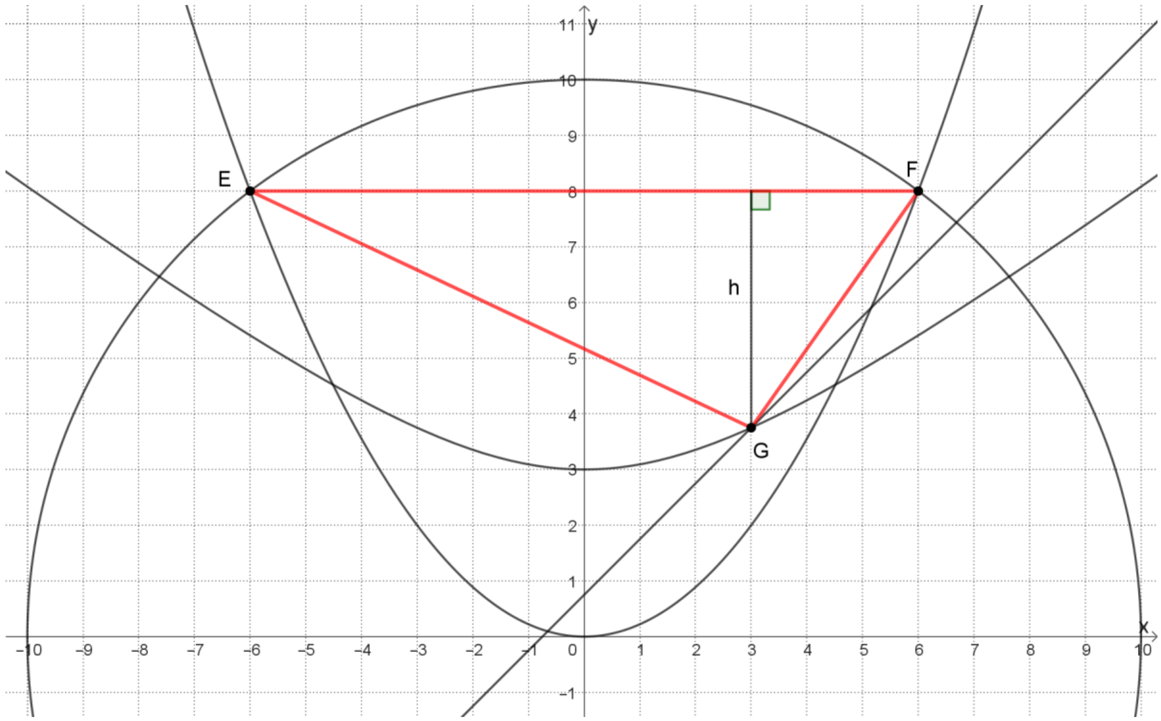
G est le point d'intersection de l'hyperbole C et de la droite D.

On trace le triangle EFG.

Ce triangle sera-t-il suffisamment grand pour contenir un élément de décor triangulaire en tout point semblable, mais dont l'aire est 25 m² ?


y
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
−1
x
−10 −9 −8 −7 −6 −5 −4 −3 −2 −1 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Solutionnaire



1) Équation du cercle :

$x^2 + y^2 = r^2$

$x^2 + y^2 = 100$

2) Équation de la parabole.

L'équation sera de la forme : $x^2 = 4cy$.

L'équation de la parabole est : $x^2 = 4\left(\frac{9}{8}\right)y$ d'où $x^2 = \frac{9}{2}y$

3) Intersection (par substitution) :

$$\frac{9y}{2} + y^2 = 100$$

$$y^2 + \frac{9y}{2} - 100 = 0$$

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-4{,}5 \pm \sqrt{4{,}5^2 - 4(1)(-100)}}{2} = \frac{-4{,}5 \pm \sqrt{420{,}25}}{2} = \frac{-4{,}5 \pm 20{,}5}{2}$$

$$y_1 = \frac{-4{,}5 + 20{,}5}{2} = \frac{16}{2} = 8$$

$y_2 = -12{,}5$ à rejeter (en dehors de la scène)

$$x^2 = \left(\frac{9}{2}\right)8 = 36$$

Donc $x_1 = 6$ et $x_2 = -6$

Les deux points d'intersection E et F sont (-6, 8) et (6, 8).

4) Équation de l'hyperbole

$c^2 = a^2 + b^2$

$5^2 = a^2 + 3^2$

$a^2 = 25 – 9 = 16$

$a = 4$

Comme les foyers sont sur une même droite verticale, l'équation de l'hyperbole à la forme :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = -1$$

5) Équation de la droite

y = ax + b

y = x + 0,75

6) Intersection (substitution)

$$\frac{x^2}{16}-\frac{(x+0,75)^2}{9}=-1$$

$$\frac{x^2}{16}-\frac{(x^2+1,5x+0,5625)}{9}=-1$$

$$\frac{9x^2}{144}-\frac{16(x^2+1,5x+0,5625)}{144}=\frac{-144}{144}$$

$$9x^2-16(x^2+1,5x+0,5625)=-144$$

$$9x^2-16x^2-24x-9=-144$$

$$-7x^2-24x^2+135=0$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-24)\pm\sqrt{(-24)^2-4(-7)(135)}}{2(-7)}=\frac{24\pm\sqrt{576+3780}}{-14}=\frac{24\pm 66}{-14}$$

$$x_1=\frac{24-66}{-14}=\frac{-42}{-14}=3$$

$x_2 = -\frac{45}{7}$ à rejeter car en dehors de la scène.

Pour x = 3, y = 3,75

Le point d'intersection G de la droite et de l'hyperbole est (3 ; 3,75).

7) La base

Le triangle EFG a un côté horizontal (EF) et sa longueur est 12m.

8) La hauteur

La hauteur est verticale car elle est perpendiculaire à la base EF.

h = 8 – 3,75 = 4,25 m

9) L'aire du triangle

$$A = \frac{Bh}{2} = \frac{(12)(4,25)}{2} = 25,5 \text{ m}^2$$

Le triangle sera donc suffisamment grand pour accueillir l'autre élément de décor.