Collège Regina Assumpta

Mathématique SN5

Chapitre troisième – Le phénomène exponentiel et le calcul logarithmique

Nom: ___________________________________

Groupe 5_______

Ce dessin  **signifie que l'usage de la calculatrice est autorisé.**

<u>RAPPEL DES PRINCIPALES LOIS DES EXPOSANTS</u>

Soit a, b, m et $n \in$ IR.
Tous les dénominateurs sont non nuls.

1. **Propriétés élémentaires :**

   $a^0 =$ ET $a^{-n} = \Bigg\{$

2. **Produit et quotient de puissances de mêmes bases :**

   $a^m \cdot a^n =$ ET $\dfrac{a^m}{a^n} =$

3. **Puissance dont la base est factorisée :**

   $(a \cdot b)^m =$ ET $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m =$

4. **Puissance dont la base est elle-même une puissance :**

   $\left(a^m\right)^n =$

IMPORTANT: $\sqrt{x} =$ _____ $\sqrt[3]{x} =$ _____ $\sqrt[n]{x} =$ _____ $\sqrt[5]{x^8} =$ _______

Exercice :
Écrire de manière équivalente avec des exposants positifs seulement.

$$\frac{2^{-17}3^{10}b^{-5}}{3^{12}a^{-3}b^{-1}c^5}$$

Écrire $\sqrt[7]{279\ 936^3}$ sous la forme a^b et donner la valeur, **sans utiliser la touche** $\sqrt[x]{\ }$ de votre calculatrice.

____

HABILETÉS ALGÉBRIQUES PRÉALABLES

Faire vos calculs à la page suivante.

1. Écrire chacune des expressions suivantes à l'aide d'exposants positifs uniquement.

a) $(4)^{-2}$ b) $\dfrac{1}{3\cdot(5)^{-1}}$ c) $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{-1}$ d) $\dfrac{(4)^2}{(3)^{-5}}$ e) $\dfrac{3}{2x^{-2}}$

f) $\dfrac{2^{-6}\cdot 4^5}{4\cdot 2^3}$ g) $\dfrac{3(x-4)^{-1}}{(x-4)}$ h) $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{-1}\cdot\left(\dfrac{5}{2}\right)^3$ i) $\dfrac{2^5\cdot 3^{-1}\cdot a^{-8}}{2\cdot 3^{-7}\cdot a^{-8}}$ j) $\sqrt[3]{5}\cdot 5^{-1/2}$

2. Effectuer les opérations et exprime ta réponse à l'aide d'une seule base et d'un seul exposant (positif).

a) $(4)^{-2}\cdot(4)^{-3}$ b) $\dfrac{\sqrt{7}}{7^{-1}}$ c) $\dfrac{a^6}{b^{-3}}\div\dfrac{1}{a^5}\cdot 2b$ d) $\left((4)^{-1}\right)^2$

3. Effectue les opérations, simplifie au maximum et exprime ta réponse à l'aide d'exposants positifs uniquement (ta réponse peut comporter plus d'une puissance)

a) $(5)^8\cdot(2)^3\cdot(5)^{-4}$ b) $(a)^{14}\cdot\dfrac{(2)^5}{(a)^8}$ c) $(8)^{10}\cdot\dfrac{(6)^{-1/2}}{(8)^{-3}}$ d) $\sqrt[3]{7^5}\cdot 7^{-1}$

4. Écrire les puissances suivantes sous la forme a^b à l'aide d'une autre base et d'un exposant positif.

a) $(9)^1$ b) $(25)^2$ c) $\dfrac{4}{9}$ d) $\left(\dfrac{27}{125}\right)^3$ e) $\sqrt{\dfrac{8}{27}}$

5. Le prix x d'un baril de pétrole a augmenté de 20% en une semaine. Quelle est l'expression algébrique qui représente le nouveau prix du baril?____________

Page réservée aux calculs.

Exercice : Traduire chacune des situations suivantes par une table de valeurs et répondre à la question posée aux deux premiers numéros. *Vous devez à chaque fois présenter les flèches qui illustrent les variations entre les variables d'un couple à l'autre!!*

#1. Des chercheurs font une étude sur une population d'insectes. On constate qu'une population de 180 224 insectes diminue de moitié chaque semaine. Déterminer le nombre d'insectes que les chercheurs pourront dénombrer à la fin de la 11^e semaine d'étude.

Temps écoulé (semaines)	0				…	t
Nombre d'insectes					…	$N =$

Réponse :________________

#2. Un bocal contenait initialement 5 bactéries. Cette population quadruple chaque heure. Combien de bactéries dénombrerait-on après 3 heures 30 minutes?

Temps écoulé (heures)	0	1	2	3	3.5	…	t
Population						…	$P =$

Réponse :________________

#3. La présence d'un certain type d'insecte ravage une forêt de 200 hectares. D'une semaine à l'autre, on constate que la superficie boisée n'est que 75% de ce qu'elle était précédemment.

Temps écoulé (semaines)	0				…	t
Superficie boisée (hectares)					…	$S =$

#4. On fait rebondir une super balle lâchée d'une hauteur de 12 mètres. On constate qu'à chaque bond, la balle remonte aux 4/5 de la hauteur précédente.

Nombre de bonds	0				…	n
Hauteur de la balle (m)					…	$H =$

#5. La valeur d'un placement bancaire de 1200$ augmente de 2% chaque année.

Temps écoulé (années)	0				…	t
Valeur du placement ($)					…	$V =$

On constate que l'état initial de la situation est donné par le ________________________ de la puissance.

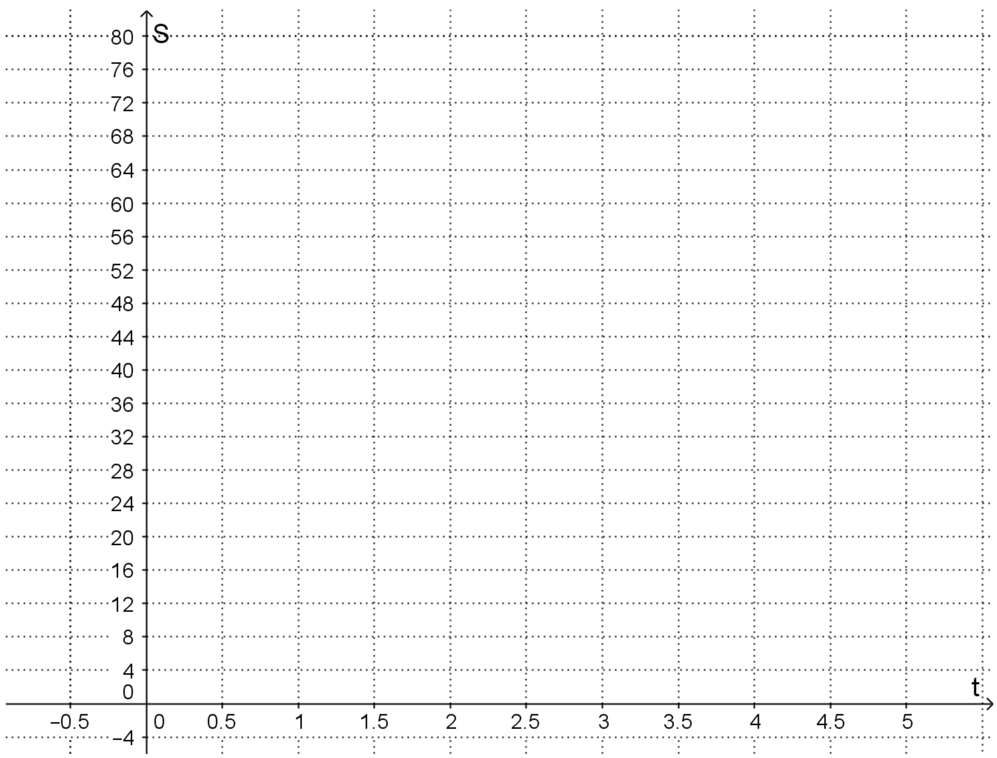
Un phénomène exponentiel peut donc être croissant ou décroissant, *rapide* ou *lent*.

Si la base d'une puissance est 1, le phénomène est considéré________________________.

LA FONCTION EXPONENTIELLE DE BASE $f(x) = a \cdot (c)^x$

Situation :
Un accident s'est produit en haute mer : le réservoir d'huile du bateau de Monsieur Arvizet est percé et l'huile se répand à la surface de l'eau.
À l'arrivée des secours, la nappe d'huile mesure $4m^2$ et sa superficie double à chaque minute.
Soit t, le temps écoulé (en minutes) depuis l'arrivée des secours et s, la superficie de la nappe d'huile (en mètres carrés).

Temps écoulé	0				…	t
Superficie d'huile	4				…	$S =$

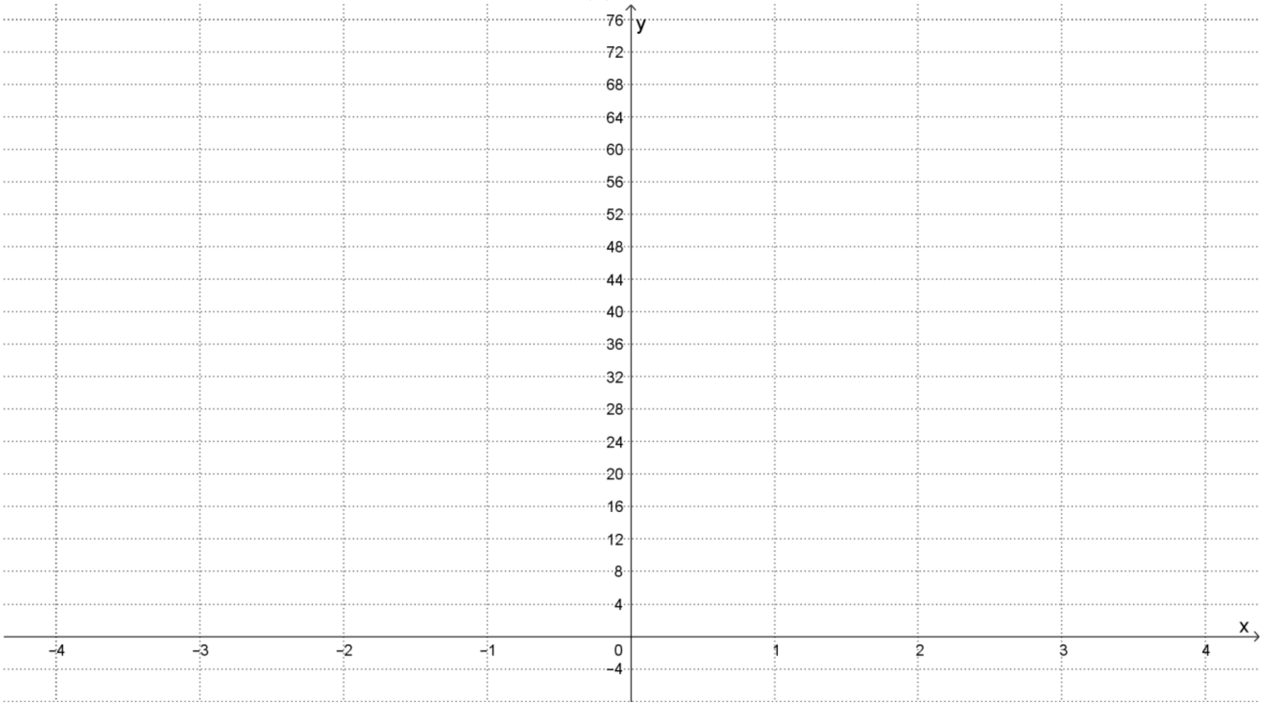


Recherche de la base…

Pour toute fonction exponentielle f de base :

$c =$

Traçons le graphique de la fonction $f(x) = 4 \cdot (2)^x$ (hors contexte)



Domaine : ______________ Codomaine : ________________________

Ordonnée à l'origine : _____ Zéro(s) : ___________________________

Variation : ______________ Équation de l'asymptote :______________

VRAI ou FAUX ?

a) La fonction $f(x) = 4^x$ est toujours positive :____________

b) La fonction $f(x) = (10)^x$ admet des images négatives pour certaines valeurs de son domaine. :____________

c) L'équation $10^x = -10$ admet une solution :____________

Exercices

Déterminer la règle de chacune des fonctions exponentielles de la forme $f(x)=a\cdot(c)^x$ suivantes.
Faites vos calculs à la page suivante.

a)

Temps écoulé	0	1	2	3	4
Superficie d'huile	54	72	96	128	$\frac{512}{3}$

b) Soit une fonction exponentielle du modèle $f(x)=a\cdot(c)^x$ telle que $f(1)=10$ et $f(2)=1$.

c)

Nombre de grenouilles	0	1	2	3	4	5	6
Nombre d'insectes			256			4	

d)

Niveau d'humidité	1	2	3	4	5	6	7
Nombre d'insectes		6075					78 125

e)

x	0	2	4	6
y	400	36	3,24	0,2916

Calculs…

QUELQUES PUISSANCES À CONNAÎTRE PAR COEUR!

$(a^0 = 1)$ avec $a \neq 0$

Puissances de 2

$2^1 =$ ____ $2^2 =$ ____ $2^3 =$ ____ $2^4 =$ ____ $2^5 =$ ____

$2^6 =$ ____ $2^7 =$ ____ $2^8 =$ ____

Puissances de 3

$3^1 =$ ____ $3^2 =$ ____ $3^3 =$ ____ $3^4 =$ ____ $3^5 =$ ____

Puissances de 4

$4^1 =$ ____ $4^2 =$ ____ $4^3 =$ ____ $4^4 =$ ____

Puissances de 5

$5^1 =$ ____ $5^2 =$ ____ $5^3 =$ ____ $5^4 =$ ____

Puissances de 6

$6^1 =$ ____ $6^2 =$ ____ $6^3 =$ ____

Puissances de 7

$7^1 =$ ____ $7^2 =$ ____ $7^3 =$ ____

Exercice : Donner la valeur de :

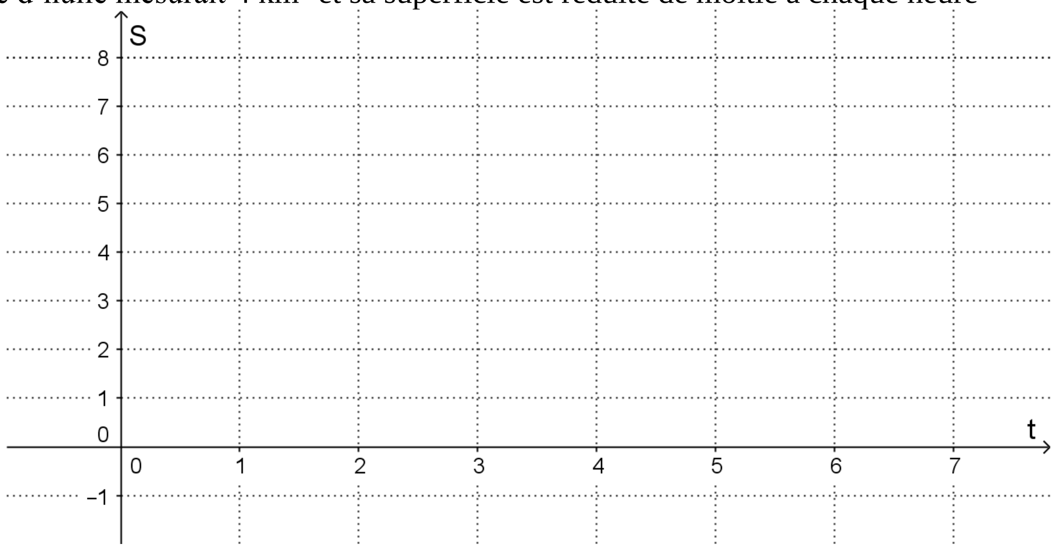
$\frac{5^4}{5} =$ $7^3 \cdot 7^{-3} =$ $4^0 \cdot 0^4$ $\frac{7^3}{49} =$ $\frac{625}{5} =$

$\frac{6}{4} =$ $\frac{256}{4^3} =$ $2^1 \cdot 2^0 =$ $2^{-1} \cdot 8 =$ $4^5 \cdot 4^{-1} =$

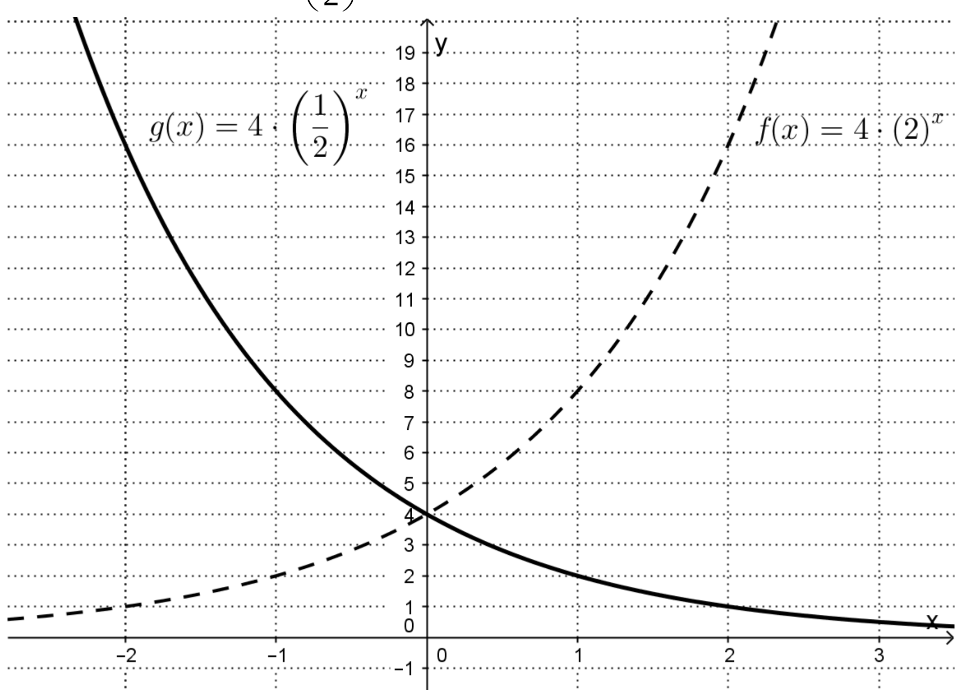
$\frac{243}{9} =$ $2^5 \cdot 4 =$ $216 \cdot 6^{-2} =$ $\frac{2^7}{8} =$ $2^{-3} \cdot 0{,}5 =$

Situation - le pompage de l'huile

Un accident s'est produit en haute mer : le réservoir d'huile du bateau de Monsieur Arvizet est percé et l'huile se répand à la surface de l'eau. Au moment où le pompage de l'huile commence, la nappe d'huile mesurait 4 km^2 et sa superficie est réduite de moitié à chaque heure



Graphique de la fonction g(*x*) = $4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$ (hors contexte)



Écrire la règle de la fonction *g* ci-dessus à l'aide de la base 2.

POUR TOUTE FONCTION <u>DE BASE</u>

La base c d'une fonction exponentielle du modèle $f(x) = a\,c^x$ peut toujours être obtenue de la manière suivante:

$c =$ De manière générale : $c^n =$

Il est également à noter que la fonction $f(x) = c^x$ avec $c < 0$, est une fonction chaotique et ne sera jamais abordée en classe.

NOTE : Ne pas confondre : $-(3)^x$ avec $(-3)^x$

<u>Exercices sur le phénomène exponentiel</u>

#1 Dire si les fonctions suivantes sont croissantes ou décroissantes.

a) $f(x) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^x$ b) $g(x) = (1{,}4)^x$ c) $h(x) = \dfrac{1}{7}(3)^x$

d) $i(x) = \left(\dfrac{4}{3}\right)^{-x}$ e) $j(n) = (c)^n \quad (0 < c < 1)$

#2 Voici 8 paires de fonctions nommées f et g. Dans chaque cas, identifier laquelle des deux représente le phénomène exponentiel le plus *intense* (ayant la vitesse de variation la plus forte).

a) $\begin{cases} f(x) = 3^{3x} \\ g(x) = 25^x \end{cases}$ b) $\begin{cases} f(x) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^x \\ g(x) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x \end{cases}$ c) $\begin{cases} f(x) = 0.01^x \\ g(x) = 100^x \end{cases}$ d) $\begin{cases} f(x) = 8^x \\ g(x) = 0.1^x \end{cases}$

e) $\begin{cases} f(x) = 4^x \\ g(x) = \dfrac{1}{5}^x \end{cases}$ f) $\begin{cases} f(x) = 2\cdot(0.3)^x \\ g(x) = 0.7^x \end{cases}$ g) $\begin{cases} f(x) = 3^x \\ g(x) = 0.99^x \end{cases}$ h) $\begin{cases} f(x) = 50^x \\ g(x) = (2\%)^x \end{cases}$

#3 Imagine et rédige un contexte pouvant être modélisé par la règle: $f(x)=100\left(\frac{1}{4}\right)^x$

Prends le soin d'identifier clairement tes variables.

#4 DÉFI : Résoudre dans IR.

a) $3^{2x} = 27$ b) $\frac{1}{4}=16^a$ c) $2^{4x} = 8^{x-1}$

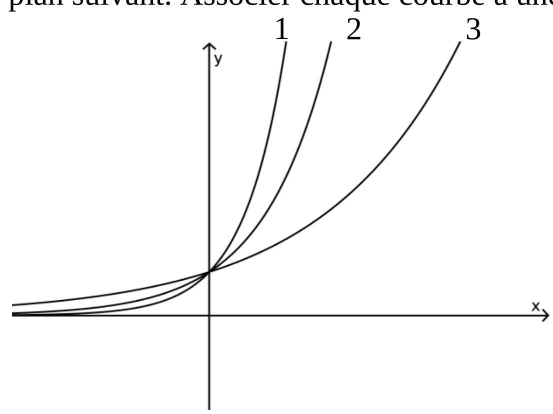
#5

Trois croquis de courbes sont représentés dans le plan suivant. Associer chaque courbe à une des trois fonctions *f*, *g* et *h* suivantes :

$f(x)=(7)^x$

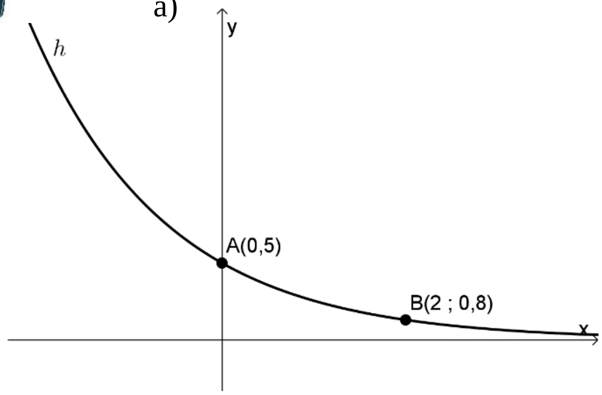
$g(x)=(1{,}2)^x$

$h(x)=(4)^x$

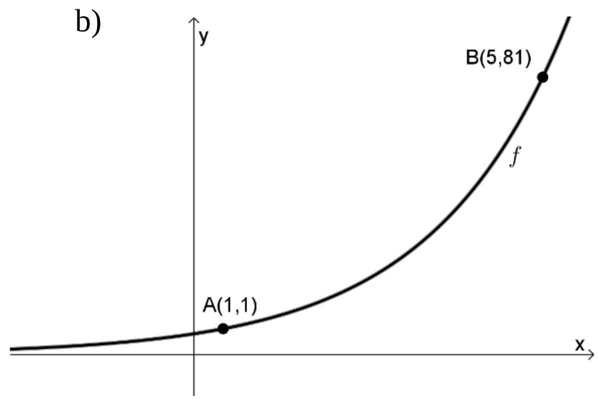


#6 Déterminer la règle des fonctions exponentielles représentées ci-dessous.

a)

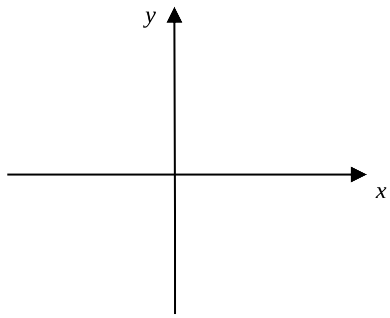


b)

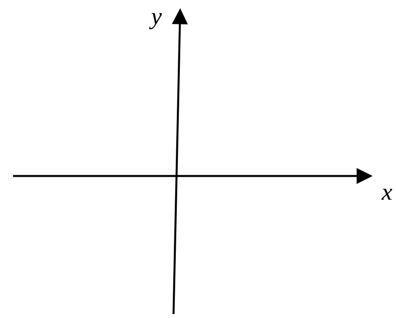


LES 4 MODÈLES DE LA FONCTION EXPONENTIELLE $f(x) = a \cdot (c)^x$

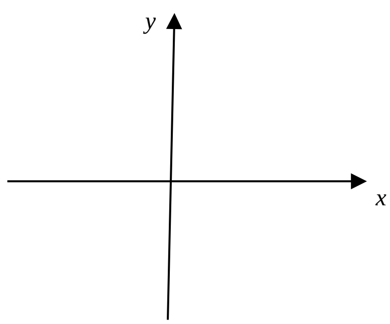
Modèle 1 : $a > 0$ et $c > 1$



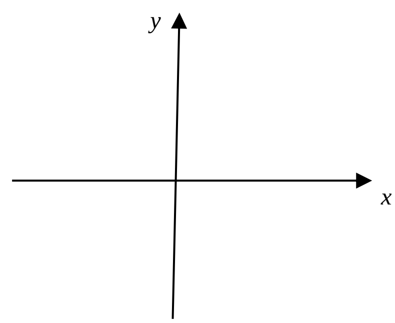
Modèle 2 : $a > 0$ et $0 < c < 1$



Modèle 3 : $a < 0$ et $c > 1$



Modèle 4 : $a < 0$ et $0 < c < 1$



Vrai ou faux?

a) Toute puissance $(c)^x$ avec $c > 0$ est positive ________________

b) Les fonctions $f(x) = (2)^x$ et $g(x) = (0.5)^x$ sont réciproques l'une de l'autre_____

c) La fonction $f(x) = (0.8)^x$ a une variation plus *forte* ou *accentuée* que $g(x) = (0.1)^x$ ____

______

d) Les fonctions $t(n) = \left(\frac{2}{3}\right)^{2n}$ et $s(n) = \left(\frac{6}{4}\right)^{-n}$ illustrent le même phénomène exponentiel___

____

e) Les fonctions $k(t) = -(0.6)^t$ et $h(t) = -(0.6)^{-t}$ ont le même codomaine_________

Exercice **:** Associer chacune des fonctions suivantes à l'un des modèles représentés.

a) $f(x) = 3^x$ (______)

b) $f(x) = 3(2{,}05)^x$ (______)

c) $f(x) = -\frac{1}{5}(0{,}5)^x$ (______)

d) $f(x) = 2(3)^{-x}$ (______)

e) $f(x) = -3(2{,}05)^x$ (______)

f) $f(x) = 0{,}1(1{,}2)^x$ (______)

g) $f(x) = (0{,}3)^x$ (______)

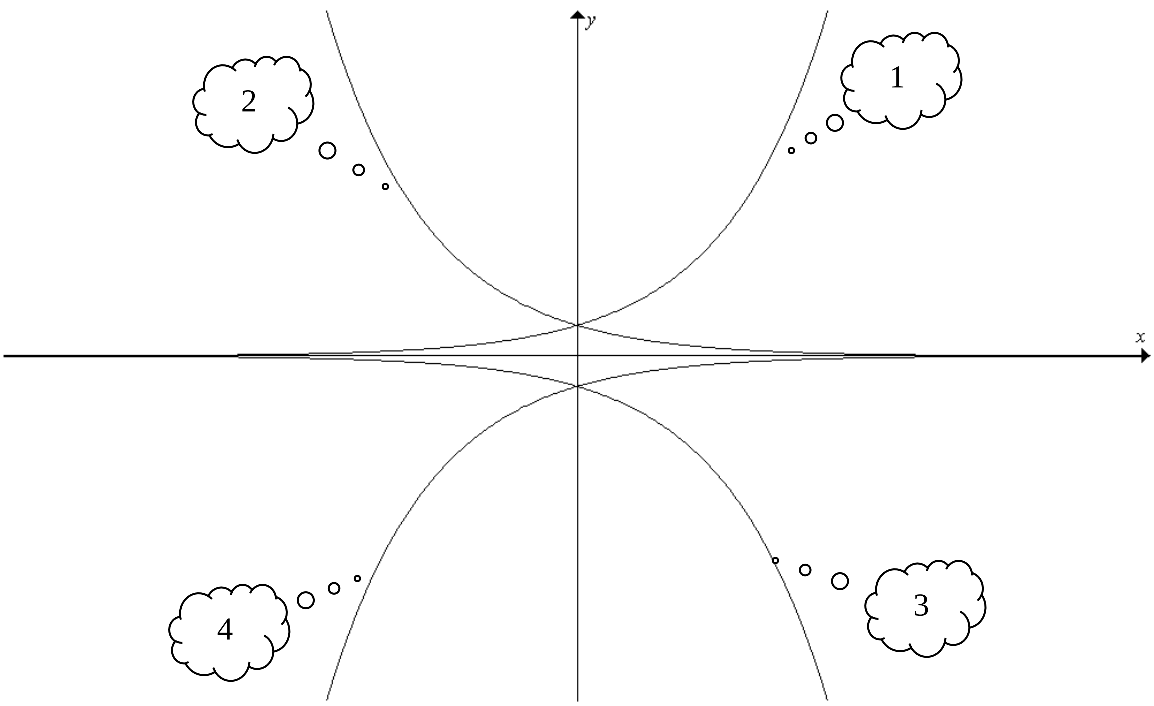
h) $f(x) = -(0{,}5)^x$ (______)

i) $f(x) = r^x, \quad r > 1$ (______)

j) $f(x) = t^{-x}, \quad t > 1$ (______)

k) $f(x) = -(c)^x, \quad 0 < c < 1$ (______)

l) $f(x) = -(u)^{-x}, \quad 0 < u < 1$ (______)



Exercice

À l'aide des lois des exposants, écrire les règles des fonctions suivantes sous la forme $f(x) = a(c)^x$

a) $f(x) = -0.1(3)^{x+4}$

b) $f(x) = \frac{1}{5}(3)^{2x+2}$

RECHERCHE DE LA RÈGLE – HORS CONTEXTE

Exercice 1 : Détermine la règle de la fonction exponentielle f du modèle $f(x) = a(c)^x$ sachant qu'elle passe par les points de coordonnées A(4 ; -62,5) et B(5 ; -312,5)

Exercice 2 : Les couples (3, 135) et (6, 3645) appartiennent à une fonction exponentielle d'équation $f(x) = a(c)^x$. Donner la règle de f.

Exercice 3 : Les couples $\left(1, \frac{-1}{3}\right)$ et $\left(-2, \frac{-9}{8}\right)$ appartiennent à une fonction exponentielle d'équation $g(x) = a(c)^x$. Donner la règle de g.

L'AJOUT D'UNE CONSTANTE AU MODÈLE DE BASE $f(x) = a \cdot (c)^x + k$

Situation

Un accident s'est produit en haute mer : le réservoir d'huile du bateau de Monsieur Arvizet est percé et l'huile se répand à la surface de l'eau. À l'arrivée des secours, où le pompage de l'huile commence, la nappe d'huile mesurait déjà 972m^2 et sa superficie diminue du tiers chaque minute. Les secours observent un peu plus loin, un bidon d'huile tombé à l'eau créant ainsi une petite nappe d'huile de 10m^2 mais dont la surface n'évolue pas.

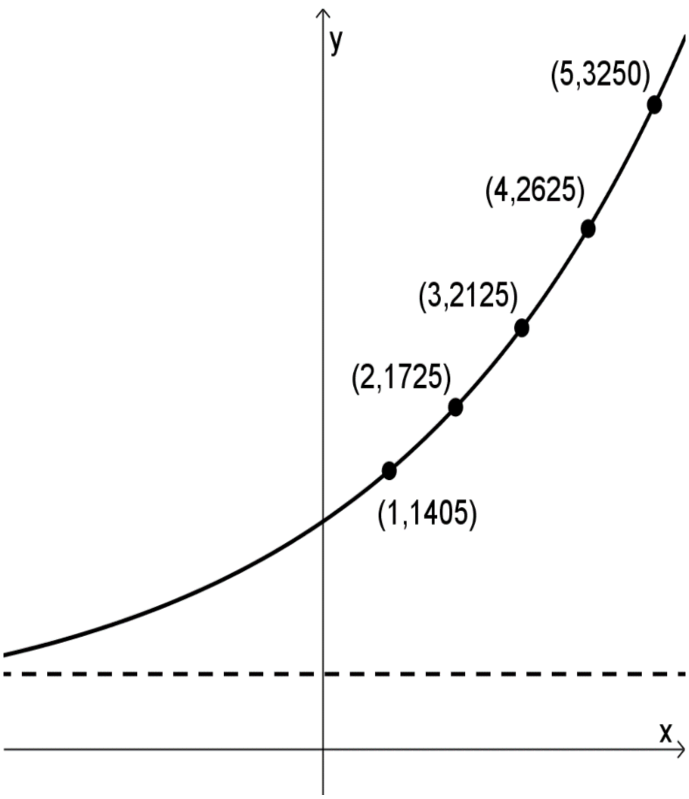
On s'intéresse à la superficie S **totale** d'huile à la surface de l'eau selon le temps écoulé (en minutes) depuis l'arrivée des secours.

Impact de la constante *k*.

- Sur le graphique, il détermine la position de ______________________________.
  Son équation est _______________.
- La valeur initiale n'est plus _______ mais maintenant ______________.
- Bris de la régularité ______________________________ dans la table de valeurs.

Soit un phénomène exponentiel illustré par la table de valeurs suivante ainsi que par le graphique illustré ci bas:

x	1	2	3	4	5	6
y	1405	1725	2125	2625	3250	4031,25

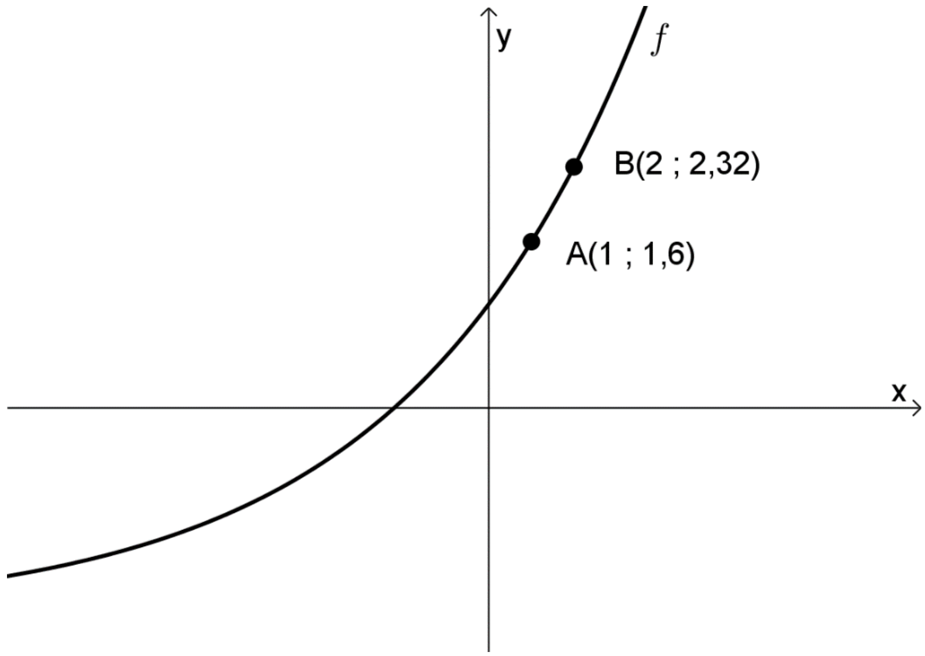


Soit la table de valeurs d'un phénomène exponentiel *f*.

x	…	x	$x+1$	$x+2$	…
y	…	$f(x)$	$f(x+1)$	$f(x+2)$	…

Exercice 1 :

Trouver la règle de la fonction exponentielle *f* illustrée ci-dessous sachant qu'elle est asymptotique à la droite d'équation y = -2.



Faire vos calculs à la page suivante.

<u>Exercice 2:</u>

Déterminer la règle de chacun des phénomènes exponentiels suivants.

a)

x	0	3	4	5	6
y	$-\frac{31}{8}$	-3	-2	0	4

b)

x	1	2	3	4	5
y	-69	-60	30	930	9930

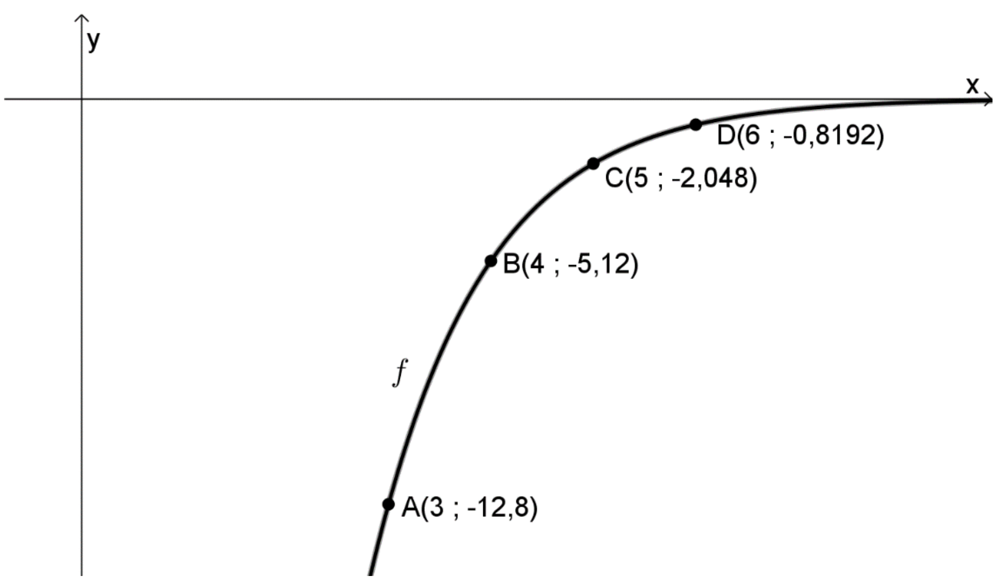
c)

x	-2	0	1	2	4
y	-113	-68	-52	$-39{,}2$	$-20{,}768$

d)

x	-1	1	3	5	7
y	1,005	1,02	1,08	1,32	2,28

e)



Calculs.

LE PARAMÈTRE *b* $f(x) = a \cdot (c)^{bx}$

Situation 1.

Un accident s'est produit en haute mer : le réservoir d'huile d'un bateau est percé et l'huile se répand à la surface de l'eau. À l'arrivée des secours, la nappe d'huile mesurait déjà $8m^2$ et sa superficie quadruple toutes les 20 secondes.

Représenter par une règle la superficie S de la nappe d'huile (en m^2) selon le temps t écoulé (en minutes) depuis l'arrivée des secours.

Temps t écoulé. (min)	0			1	…	t
Superficie S d'huile (m^2)	8				…	$S =$

Règle : ___________________

Situation 2.

Un accident s'est produit en haute mer : le réservoir d'huile du bateau de Monsieur Arvizet est encore percé et l'huile se répand à la surface de l'eau. À l'arrivée des secours, la nappe d'huile mesurait déjà $70m^2$ et sa superficie quintuple toutes les 4 minutes.

Représenter par une règle la superficie S de la nappe d'huile (en m^2) selon le temps t écoulé (en minutes) depuis l'arrivée des secours.

Temps t écoulé. (min)	0	1	2	3	4	…	t
Superficie S d'huile (m^2)	70					…	$S =$

Règle : ___________________

RECHERCHE DE LA RÈGLE - EN CONTEXTE

Représenter chacune des situations suivantes par une règle où *t* représente le temps écoulé en années depuis le début du phénomène et *v*, la valeur en dollars après *t* années.

a) La valeur d'une action achetée au coût de 11$ augmente de 50 cents à chaque année.

Règle : ________________________

b) Une voiture de 15 000$ perd 20% de sa valeur par année.

Règle : ________________________

c) La valeur d'une action achetée au coût de 11$ diminue du tiers tous les 6 mois

Règle : ________________________

d) La valeur d'une action achetée au coût de 50 cents augmente de 7% tous les 36 mois

Règle : ________________________

e) Une voiture de 15 000$ perd 25% de sa valeur tous les 18 mois.

Règle : ________________________

f) Une œuvre d'art achetée au coût de 10 000$ gagne 15% de sa valeur 5 fois tous les 8 ans.

Règle : ________________________

g) Une œuvre d'art achetée au coût de 10 000$ gagne 15% de sa valeur 9 fois tous les 9 ans.

Règle : ________________________

Pour les deux situations suivantes, *x* représente le temps écoulé en heures depuis le début du phénomène et *f(x)*, le nombre de bactéries observées.

a) Une population de 10 bactéries augmente de 10% toutes les 20 secondes.

Règle : ________________________

b) On remarque que d'une population de 150 bactéries, seulement 4 bactéries ne se reproduisent pas. Les autres se dédoublent trois fois toutes les 2 heures.

Règle : ________________________

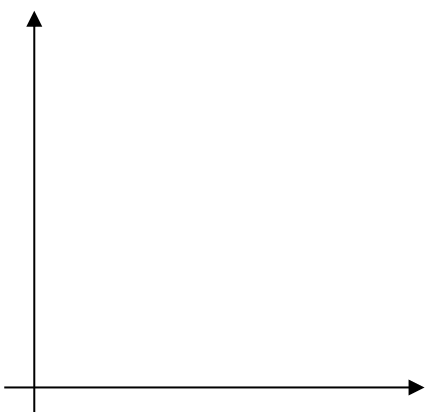
LE PARAMÈTRE *h* $f(x) = a \cdot (c)^{x-h}$

Situation :

Un accident s'est produit en haute mer : le réservoir d'huile du pétrolier de Monsieur Arvizet est percé et l'huile se répand à la surface de l'eau. À l'arrivée des secours, la nappe d'huile mesurait déjà 8m^2 et sa superficie augmente de 50% toutes les 30 secondes.
Cinq minutes après le début du déversement, le bris est réparé et les secours débutent le nettoyage. La dimension de la nappe d'huile réduit de 40% toutes les 3 minutes.

Quelle sera la dimension de la nappe d'huile 15 minutes après l'accident?

a) Faire un croquis représentant l'évolution de la surface S d'huile (en m^2) selon le temps t écoulé (en minutes) depuis l'accident.



b) Exprimer l'évolution de la superficie d'huile selon le temps par une règle écrite par parties

c) Le coefficient de la puissance de la 2^e partie de la règle représente-t-il l'ordonnée à l'origine de la fonction? Pourquoi?

Réponse : 15 minutes après l'accident, la superficie de la nappe d'huile sera de _____________.
À l'aide des lois des exposants, récrire le 2^e bloc de la fonction sous la forme $S = a(c)^t$.
Que représente le coefficient a ainsi obtenu ?

Exercices sur le paramètre *h*.

Faire vos calculs à la page suivante…

Exercice 1 :

Soif une fonction exponentielle *f* définie par de la table de valeurs suivante :

x	0	1	2	3	4
f(x)	80	32	12,8	5,12	2,048

Donner quatre règles différentes et équivalentes sous la forme $f(x) = a \cdot (c)^{x-h}$ pour cette fonction *f*.

*Exercice 2 :

Soif une fonction exponentielle *f* définie par de la table de valeurs suivante :

x	-4	-3	-2	-1
f(x)	$-183{,}3125$	$-144{,}25$	-113	-88

Donner quatre règles différentes et équivalentes sous la forme $f(x) = a \cdot (c)^{x-h} + k$ pour cette fonction *f*. *Ne pas oublier que la valeur initiale d'une fonction exponentielle transformée correspond à a + k…*

*Exercice 3 :

Soit la fonction $f(x) = 45\,927 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^x$.

On souhaite écrire la règle de cette même fonction *f* sous la forme $f(x) = 567 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{x-h}$

Donner la valeur de *h*.

*Exercice 4 :

Soit la fonction $f(x) = 1445 \cdot (0{,}85)^x$.

On souhaite écrire la règle de cette même fonction *f* sous la forme $f(x) = 2000 \cdot (0{,}85)^{x-h}$

Donner la valeur de *h*.

Calculs…

GeoGebra

Résumé des paramètres *h* et *b* ainsi que des deux modèles

A – Le paramètre *h*
$f(0) \neq a + k$ lorsque la règle de la fonction présente un paramètre *h*.

Pour le calcul de l'ordonnée à l'origine lorsque $h \neq 0$, 2 choix s'offrent à nous :

1- On substitue *x* par zéro (0): $f(0) = a \cdot (c)^{b(0-h)} + k$.

2- On simplifie la règle pour obtenir le modèle $f(x) = a \cdot (c)^{x} + k$. Ainsi $f(0) = a \cdot +k$

Note : Une même fonction exponentielle peut être écrite d'une multitude de façons différentes (selon la valeur de la constante *h* choisie et le coefficient *a* correspondant).

B – Le paramètre *b*
Comme nous l'avons vu précédemment, le paramètre *b* ne modifie pas l'ordonnée à l'origine de la fonction. Comme il s'intègre à la base, **il influence le sens de variation** (croissant ou décroissant) **ainsi que la force** de variation

NOTE : Ces deux derniers paramètres **peuvent toujours est simplifiés à 0 et 1** respectivement pour obtenir ce que l'on appelle la *forme simplifiée* de la fonction exponentielle. Nous rechercherons presque toujours cette forme avant d'analyser le comportement d'une fonction.

RÉSUMÉ DES DEUX MODÈLES

1. **De base** $f(x) = a(c)^{x}$
(avec $h = 0$ et $b = 1$)

Ordonnée à l'origine :____________

Base : $c =$

Équation de l'asymptote :_________

2. **Avec constante (simplifié)** $f(x) = a(c)^{x} + k$
(avec $h = 0$ et $b = 1$)

Ordonnée à l'origine :____________

Base : $c =$

Équation de l'asymptote :_________

À l'aide des lois des exposants, réécrire chacune des règles suivantes sous la forme simplifiée $f(x) = a \cdot c^x + k$ et donner la valeur de *a, c* et *k*. *Faire vos calculs à la page suivante.*

a) $f(x) = 1 - 2^x$

b) $f(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} - 1$

c) $f(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^{-x}$

a =_____ *c* =_____ *k* =_____ *a* =_____ *c* =_____ *k* =_____ *a* =_____ *c* =_____ *k* =_____

d) $f(x) = 2\left(\frac{5}{4}\right)^{2x}$

e) $f(x) = 25(5)^{x-3}$

f) $f(x) = -(3)^{2x+4} - 3$

a =_____ *c* =_____ *k* =_____ *a* =_____ *c* =_____ *k* =_____ *a* =_____ *c* =_____ *k* =_____

g) $f(x) = \left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^{2x+6} + \frac{2}{5}$

h) $f(x) = \frac{1}{3}(0{,}25)^{-0{,}5x+1} + 2$

i) $f(x) = -\sqrt[3]{27}(3)^{2x-3} - \sqrt[3]{81}$

a =_____ *c* =_____ *k* =_____ *a* =_____ *c* =_____ *k* =_____ *a* =_____ *c* =_____ *k* =_____

Cette page est la page suivante – conché!

Les taux d'intérêt composés

Représenter l'évolution des investissements suivants.

Un taux d'intérêt est toujours un pourcentage annuel

a) Marvin investi un montant de 500$ à un taux d'intérêt annuel de 10% capitalisé à la fin de l'année.

Temps écoulé (années)	0			…	t
Valeur du placement de Marvin ($)	500			…	

b) Gabriella investi un montant de 500$ à un taux d'intérêt annuel de 10% capitalisé 2 fois par année.

Temps écoulé (années)	0			…	t
Valeur du placement de Gabriella ($)	500			…	

c) Jean-Simon investi un montant de 500$ à un taux d'intérêt annuel de 10% capitalisé à tous les 4 mois.

Temps écoulé (années)	0				…	t
Valeur du placement de Jean-Simon ($)	500				…	

Pour toute situation de placement d'intérêts composés:

V : La valeur du placement.
C : Le capital investi (placement initial).
r : Le taux d'intérêt $(0 < r < 1)$.
n : Le nombre de fois où les intérêts sont capitalisés par année.
t : La durée du placement (en années)

Exercices sur les taux d'intérêt composés

1. Alicia place 1 000\$ à un taux de 5% d'intérêt annuel. Les intérêts sont capitalisés à tous les 4 mois. Ce placement est pour une période de 10 ans. Quel sera le montant accumulé par Alicia à la fin de cette période?

2. Quelle somme a été placée par Xavier si, après 5 ans le montant accumulé est de 3 540,49\$. Le taux d'intérêt (annuel) est de 7% et ces intérêts sont capitalisés tous les deux mois.

3. Thevenel a placé une somme de 2 500\$ pendant 15 ans qui a généré un montant de 9 363,30\$ (capital et intérêts). Les intérêts ont été capitalisés 2 fois l'an. Quel était le taux d'intérêt annuel ?

LA BASE *e*

Imaginons la situation suivante (trop belle pour être vraie!) : une somme de 1$ est placée à un taux d'intérêt annuel de 100%. Déterminer la valeur *V* de ce placement à la fin de l'année si les intérêts sont capitalisés :

	$V = 1\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n \bullet 1}$
1 fois (à la fin de l'année)	
12 fois (à tous les mois)	
52 fois (à toutes les semaines)	
365 fois (à tous les jours)	
8 760 fois (à toutes les heures)	
525 600 fois (à chaque minute)	
À chaque fraction de seconde? (genre l'existence de ton gérant de banque est entièrement consacrée à te verser tes intérêts...)	

Pour votre culture…

Le nombre *e* est probablement la constante réelle irrationnelle la plus importante des mathématiques, après π.

Nous venons de voir une manière de construire *e*, mais elle n'est pas unique. La série suivante permet aussi de retrouver *e*

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ \dots \ + \frac{1}{k!} + \ \dots$$

Ou encore, *e* peut être retrouvé par fraction continue : $e = 2 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\dots}}}}}}}}$

Le nombre *e* ne possède pas beaucoup d'autres applications qu'en finance, en électronique, en sciences et dans la recherche en mathématiques, mais son utilité est grande dans ces domaines!

Exercice 1 :
Un satellite de communication dispose d'une source d'énergie dont la puissance P, en watts, varie selon la règle $P = 65(e)^{-t/300}$, où t est le temps, en jours, écoulé depuis la mise en orbite.
a) S'agit-il d'une fonction croissante ou décroissante?
b) Quelle est la puissance du satellite au moment de sa mise en orbite et 1 an après sa mise en orbite?
c) Si la durée de vie du satellite est de 1000 jours, déterminer le codomaine de la fonction représentant cette situation.

Exercice 2 : Représenter chacune des situations suivantes par une règle où V est exprimé en dollars et t en années.

a) Un capital de 2000$ investi à un taux d'intérêt de 3% est capitalisé à chaque année

Règle : __________________

b) Un capital de 5000$ investi à un taux d'intérêt de 8% est capitalisé aux 6 mois.

Règle : __________________

c) Un capital de 5000$ investi à un taux d'intérêt de 100% est capitalisé 18 fois par année (YEAH RIGHT !).

Règle : __________________

d) Claude s'est acheté une œuvre d'art au coût de 400$ qui gagne 1% de sa valeur tous les 3 mois.

Règle : __________________

<u>RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS EXPONENTIELLES</u>

<u>Exercice 1</u> **:** Résoudre les équations suivantes *(sauf pour la lettre c)*

a) $216=(6)^{x+1}$

b) $0=125\left(\frac{1}{5}\right)^{3x}-1$

c) $0=11(7)^{2x-1}-539$

d) $\left(\frac{1}{4}\right)^{8x}=2^{-10x+18}$

e) $\sqrt[3]{\frac{2}{7}}\cdot\left(\frac{49}{4}\right)^{2x+12}=\frac{7^{3x}}{2^{3x}}$

f) $0=\frac{3^{2x}}{\sqrt{3^{2x-10}}}-81$

Exercice 2 :

Détermine les coordonnées du point d'intersection de la fonction $f(x) = -\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}\right)^x + 3$ et de la droite d'équation $y = \frac{57}{16}$.

Toute puissance du modèle c^x (avec c > 0) **ne représentera jamais une quantité négative** (phrase très importante dont il faudra se souvenir tout au long de ce chapitre).

Par exemple, l'équation $-4 = (1{,}2)^x$ est sans solution dans les Réels.

Exercice 3 :

Faire l'étude complète de la fonction $f(x) = -\frac{9}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^{-3x-1} + 1$

Domaine : ______________________

Codomaine : ____________________

$f(0)$ = __________________________

Zéro(s) : _______________________

$f(x) \geq 0 \ \forall \ x \in$ ____________________

$f(x) \leq 0 \ \forall \ x \in$ ____________________

Équation de l'asymptote : _________

$\forall \ x_1, x_2 \in$ ____ : $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Faites vos calculs à la page suivante…

Exercice 4 :

a) Déterminer les valeurs possibles de c pour que le zéro de la fonction $f(x) = -3(c)^{2x-1} + 6$ se trouve dans l'intervalle $]1, 2]$

b) DÉFI !
Déterminer les valeurs de c pour que le zéro de la fonction $f(x) = (c)^{2x} - 4$ se trouve dans l'intervalle $]-1, 2]$

c) Déterminer les valeurs possibles de m pour que la fonction $f(x) = \frac{1}{4}(3m-2)^{5x+7}$ soit décroissante.

Quiz récapitulatif

#1 Soit la fonction $f(t) = -3\left(\frac{1}{4}\right)^{0,5t+1} + 6$

a) Sur quel intervalle f est-elle négative?

b) Écrire la règle de la fonction f sous la forme $f(t) = a(c)^t + k$

#2 Donner la règle d'une fonction exponentielle g sachant qu'elle passe par les points A$\left(0, -\frac{3}{2}\right)$, B$\left(2, \frac{5}{2}\right)$ et est asymptotique à la droite $y = -2$

Calculs…

LE «FAMEUX» LOGARITHME…

____

____

Écrire chacune des égalités suivantes sous forme logarithmique.

a) $7^2 = 49$ b) $5^4 = 625$ c) $10 = 2^x$

Écrire chacune des égalités suivantes sous forme exponentielle.

a) $5 = \log_2 32$ b) $\log_6 216 = 3$ c) $u = \log_v t$

Lorsque la base d'un logarithme n'est pas écrite, elle vaut_____________ par défaut.

Par exemple $\log_{10} 25$ s'écrira tout simplement ________________.

La calculatrice scientifique est aussi programmée pour calculer en base *e* car c'est une base très souvent utilisée en sciences.

Le logarithme d'une puissance *a* dans la base *e* ne s'écrira non pas $\log_e a$ mais plutôt ________

1. Donne la valeur de chacune des expressions logarithmiques suivantes :
   a) $\log_2 64$ b) $\log_4 64$ c) $\log 0{,}1$

d) $\log_{16} 64$

e) $\log_5 0{,}008$

f) $\log_{16} \frac{1}{4}$

g) $\log_3 9$

h) $\log_{25} 25$

i) $\log_4 1$

j) $\log_5 \frac{1}{25}$

k) $\log_{2/3} 1$

l) $\log 10\,000$

2. Trouver la valeur de x.

a) $\log_4 x = 0$

b) $\log_x 16 = 4$

c) $\log_8 x = \frac{2}{3}$

d) $\log_{64} x = \frac{7}{6}$

e) $\log_2 x = 1$

f) $\log_x 64 = 3$

g) $\log_{1/4} x = 2{,}5$

PROPRIÉTÉS DES LOGARITHMES

Écrire les démonstrations à la page suivante…

Les définitions.

1. $\log_a 1 = 0$
2. $\log_a a = 1$

La loi fondamentale.

3. $a^{\log_a m} = m$

Le logarithme d'un produit.

4. $\log_a (mn) = \log_a m + \log_a n$

Le logarithme d'une puissance.

5. $\log_a (m)^n = n \cdot \log_a m$

5.1 $\log_a \frac{1}{m} = -\log_a m$

5.2 $\log_a \left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n$

Le changement de base.

6. $\log_a(m) = \dfrac{\log_b(m)}{\log_b(a)}$

6.1 $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$

6.2 $\log_{a^n}(m) = \dfrac{1}{n}\log_a(m)$

6.3 $\log_{1/a}(m) = -\log_a m$

Rédigez ici les démonstrations des lois des logarithmes.

Exercices à partir des deux vidéos. *Calculs à la page suivante.*

Partie 1 : Utiliser les lois des logarithmes pour développer et réduire au maximum chacune des expressions suivantes.

a) $\log_4(16tu)$ b) $\log_2 12(x+16)^2$

Partie 2 : Écrire chacune des expressions suivantes à l'aide d'un seul logarithme et arrondir sa valeur au dix-millième près.

a) $\log_5(200)+\log_{1/5}(8)$ b) $4^{\log_4(3)}-\log_9\left(\frac{1}{\pi}\right)$

1. Écrire les expressions suivantes sous la forme développée.

a) $\log_c(2mn)$ b) $\log_5 7(x+2)^2$ c) $\log_3(4x^2)$ d) $\log_2\left(\frac{5a}{b^2}\right)$

e) $\log_4(4mn)^3$ f) $\log_6(2(x+1))^2$ g) $\log_4(16\sqrt{x})$ h) $\log(x^2-4)$

2. Écrire chacune des expressions numériques suivantes en utilisant un seul logarithme.

a) $\log_2 5+\log_2 8$ b) $\log_4 45-\log_4 3$ c) $\ln 48-\ln 8-\ln 4$

d) $2\log 25-3\log 5$ e) $\log_2 0{,}5+\log_2 4+3\log_2 3$ f) $\dfrac{\log_2 9}{\log_2 10}-\log 3$

3 À l'aide des 4 approximations fournies et sans utiliser la touche LOG de la calculatrice, estimez la valeur des logarithmes demandés.

$\log 2 \approx 0{,}301\,03$ $\log 3 \approx 0{,}477\,12$

$\log 5 \approx 0{,}698\,97$ $\log 7 \approx 0{,}845\,10$

a) $\log 9$ b) $\log 14$ c) $\log 45$ d) $\log 90$ e) $\log 50$

f) $\log 7^5$ g) $\log 0{,}5$ h) $\log\sqrt{\frac{35}{6}}$ i) $\dfrac{\log 20}{\log 40}$ j) $\log 54\times\log 70$

4. Simplifier l'expression suivante :

$$\log 10-\log\left(\frac{2}{5}\right)-\log\left(\frac{35}{2}\right)+\log\left(\frac{21}{2}\right)+\log\left(\frac{21}{63}\right)$$

Calculs…

RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS EXPONENTIELLES *funky !*

Méthode 1 (log = log)

Soit 2 nombres réels a et b.
Une propriété importante des nombres réels est la suivante :

Si $a = b$ alors $\log_c(a) = \log_c(b)$.

Cette méthode est fastidieuse mais c'est la plus couramment utilisée.

Méthode 2 ($c^x = p$)

- On simplifie TOUS les exposants à x.
- On regroupe les puissances entre-elles.
- On utilise la définition du logarithme.

Cette méthode est hautement efficace mais vous ne la verrez jamais nulle-part.

Exercice : À l'aide de la méthode de votre choix, résolvez chacune des équations suivantes en présentant vos réponses en valeur exacte ET arrondie au dix-millièmes.

1. $3^{x+2} = 4$
2. $6^{3x-1} = 4^x$
3. $e^{2x-1} = 15^{x+2}$
4. $(10)^{x/5} = (0,2)^{x-40}$
5. $2^{x-7} = 25 \cdot 3^{2x}$
6. $\frac{2}{5} \cdot 2^{0,5x} = 3^{2x+1}$
7. $-3 \cdot 2^{x-3} = -\frac{1}{2} \cdot 5^{2x+2}$
8. $(14)^{-x/2} = -3$
9. $4 \cdot \left(\frac{1}{e}\right)^{2x+3} = 14 \cdot (3)^{7x-1}$
10. $-(0,1)^{\log_{0,1} 7} = -2(10)^{6x} + 3$
11. $8 \cdot e^{5x} = 8 \cdot 10^x$
12. DÉFI! $(e)^{x(x-1)} = 3^{x+1/2}$

Page suivante.

Cette page est la deuxième page suivante… (conché!)

Inéquations exponentielles – résolution algébrique

Comme pour toutes les autres fonctions réelles, une inéquation peut être résolue de manière purement algébrique, c'est-à-dire sans avoir recours à un croquis. Nous distinguerons alors deux cas.

Cas #1 – Comparaison de puissances de même base.

Exemple 1 (bases supérieures à 1)

$$\left(\frac{5}{2}\right)^{2x-6} \geq \left(\frac{5}{2}\right)^{-x+1}$$

Comme les bases sont supérieures à 1, il s'en suit que l'exposant de la puissance de gauche est supérieure à l'exposant de la puissance de droite.

$$2x-6 \geq -x+1$$
$$x \geq \frac{7}{3}$$

Exemple 2 (bases inférieures à 1)

$$(0{,}6)^{x-1} \geq (0{,}6)^{5x+3}$$

Comme les bases sont inférieures à 1, il s'en suit que l'exposant de la puissance de gauche est inférieur à l'exposant de la puissance de droite.

$$x-1 \leq 5x+3$$
$$-1 \leq x$$

Cas #2 – Comparaison de puissances de bases différentes.

La résolution d'une inéquation exponentielle de bases différentes repose sur le principe suivant : Soit deux nombres réels positifs *a* et *b* tels que $a \geq b$.

Il s'ensuit que $\log(a) \geq \log(b)$ et $ln(a) \geq ln(b)$

Inversement si $a \leq b$ il s'ensuit que $\log(a) \leq \log(b)$ et $ln(a) \leq ln(b)$

Exemple :

$$e^{2x-10} \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{x+3}$$
$$ln\left(e^{2x-10}\right) \leq ln\left(\frac{1}{4}\right)^{x+3}$$
$$(2x-10)ln(e) \leq (x+3)ln\left(\frac{1}{4}\right)$$
$$2x-10 \leq x\,ln\left(\frac{1}{4}\right)+3ln\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$2x-x\,ln\left(\frac{1}{4}\right) \leq 10+3ln\left(\frac{1}{4}\right)$$
$$x\left(2-ln\left(\frac{1}{4}\right)\right) \leq 10+3ln\left(\frac{1}{4}\right)$$

En divisant par le coefficient de *x* qui est une quantité positive, on ne change pas le sens du symbole d'inégalité

$$x \leq 1{,}7249$$

Servez-vous de la page suivante pour effectuer vos calculs.

<u>Exercice 1</u> : Résoudre l'inéquation $f(x) < g(x)$ dans IR à partir des règles suivantes :

$$f(x) = -\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{2x+3} - 2 \qquad \text{et} \qquad g(x) = -\left(\frac{27}{8}\right)^{x} - 2$$

<u>Exercice 2</u> : Résoudre les inéquations suivantes, en vous servant des modèles de la page 14.

- *Arrondir vos réponses au dix-millième au besoin.*
- *Les exerccies marqués d'une étoile <u>doivent</u> être faits sans calculatrice*

a) $-4(12)^{x-1} + 5 \leq -8$

b) $8\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} > 12(2)^{x}$

*c) $\left(\frac{2}{5}\right)^{x} > \left(\frac{125}{8}\right)^{10x}$

*d) $(8)^{x+1} \geq \frac{1}{4}(2)^{x+9,3}$

e) $4(2,3)^{x} \leq (5,5)^{2+x}$

f) $-(12)^{2x} \leq (7)^{x-1}$

g) $\left(0,31^{x}\right)^{2} > (e)^{5x-6}$

*h) $(1)^{14x-15} < \left(10^{\log 1}\right)^{x+10}$

Calculs…

Cré Monsieur Arvizet!

Un accident s'est produit en haute mer : le réservoir d'huile du bateau de Monsieur Arvizet est percé et l'huile se répand à la surface de l'eau.

La superficie d'huile (en m^2) à la surface de l'eau varie selon la règle suivante où t est exprimé en heures :

$$S = -12\left(\frac{1}{4}\right)^{0.5t} + 17$$

a) En vous basant sur les modèles présentés à la page 14, représente cette situation par un croquis.

b) Si 8 heures se sont écoulées avant que les secours n'interviennent, pendant combien de temps la superficie d'huile a-t-elle été supérieure à 150% de sa superficie initiale?

c) Donner la règle qui correspond à la même situation dans laquelle t est exprimé en minutes.

Conché!

Le 1er septembre 2008, l'annonce d'une crise financière majeure frappe les marchés mondiaux. Le cours de l'action de l'entreprise *Conch-inc.* s'est mis à varier selon la règle :
$V(t) = -20(1{,}1)^t + 60$ (où V est exprimé en dollars et t est le nombre d'années écoulées depuis le premier septembre 2008). La valeur de l'action s'est par la suite stabilisée à 28$ pendant 1 an et a par la suite perdu 5% de sa valeur tous les 4 mois.

Votre tâche :

a) Traduire le texte par une règle écrite par parties (vous référer à la page 24 au besoin).

b) Dire en quelle année et pendant quel mois l'action aura-t-elle perdu 65% de sa valeur initiale

<u>RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS LOGARITHMIQUES</u>

Utiliser la page suivante pour vos calculs…

1. $\log_2 (x - 3) = 4$

2. $\log_3 (x + 4) - \log_3 x = 2$

3. $\log_8 (2x - 7) = \log_8 (5 - x)$

4. $\ln\left(\dfrac{3x + 24}{5}\right) = \ln(-x)$

5. $\log_2 (x - 2) + \log_{0.5}(x + 1) = \log_2 10$

6. $\ln 5x - 2\ln 4 = \ln(x - 3)$

7. $\log_3\left(x^2 - 6x + 5\right) = \log_3(6x - 15)$

8. $\log_4(x + 3) - 2 = \log_4(x - 4)$

DÉFI! *Il faut savoir que la notation* $\ln^2 x$ *est équivalente à* $(\ln x)^2$ …

9. $-3\ln^2(x) - 15\ln(x) + 18 = 0$

Calculs…

<u>Exercices</u> : Pour chacun des exercices suivants, identifier les variables avant de résoudre.

#1) Le nombre de bactéries d'une culture microbienne augmente de 40% toutes les heures. Combien d'heures devront être complétées pour que le nombre de bactéries passe de 100 à plus de 5 000 000?

#2) En 1995, Anne-Marie a placé 2300$ dans un REER à un taux d'intérêt de 9% capitalisés annuellement. En quelle année son placement dépassera-t-il 18 000$?

#3) Un ballon d'anniversaire qui contient 8000cm^3 d'air perd 1/5 de son contenu toutes les 12 heures. Dans combien d'heures (arrondir à l'entier), le volume d'air du ballon sera-t-il inférieur à 2000cm^3 ?

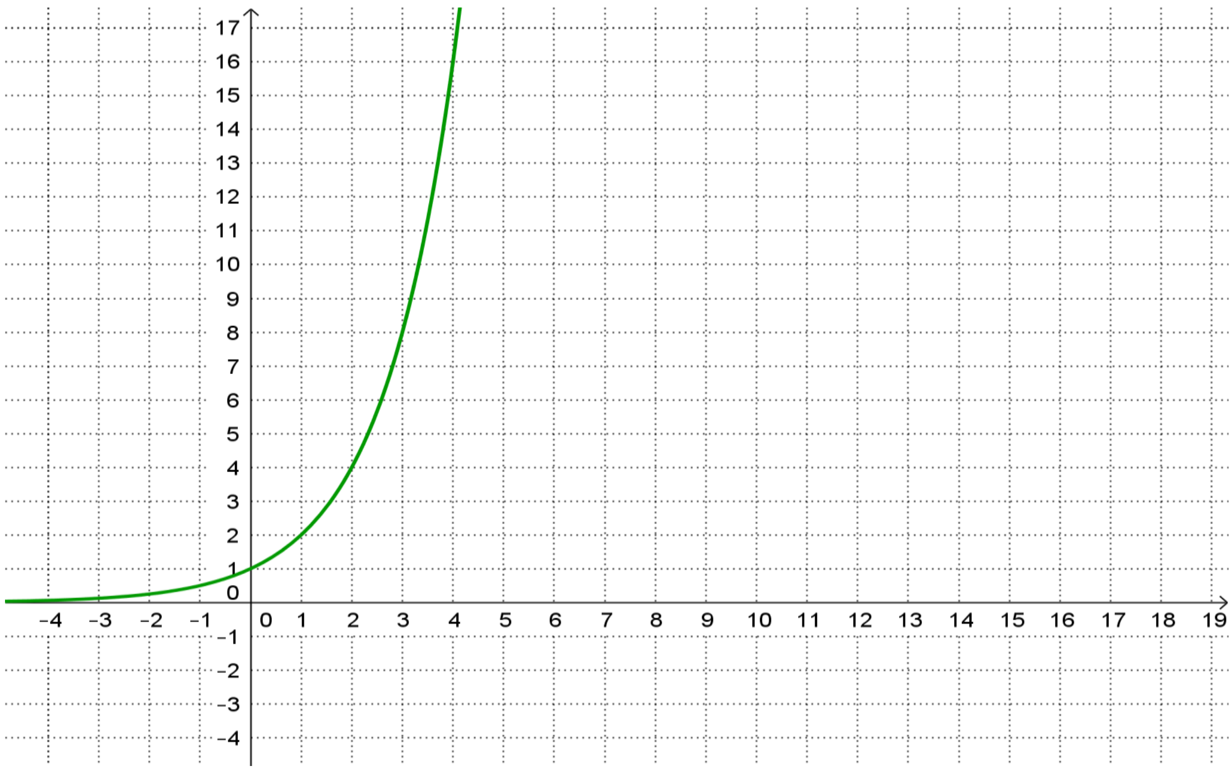
#4) Sabine laisse tomber une balle par la fenêtre d'un 7^e étage. À chaque bond, la balle perd 1/5 de sa hauteur maximale au bond précédent. Sabine calcule que sa balle a atteint 16m au premier bond. Après combien de bonds la balle atteindra-t-elle une hauteur de 45cm ?

#5) Au mois de mai, une population d'insectes triple tous les deux jours. Si à un certain moment on dénombre 48 361 000 insectes, combien de jours auparavant y en avait-il 91 ?

#6) Le pneu avant d'un vélo se dégonfle de manière telle que la pression d'air dans le pneu diminue de 12% 2 fois par année. Dans ces conditions, dans combien de temps la pression d'air dans le pneu aura-t-elle diminuée de 60% ?

FONCTION LOGARITHMIQUE DE BASE

$f(x) = 2^x$



Analyse de la fonction logarithmique de base.

Dom f^{-1} :_____________ Codom f^{-1} :_____________ Zéro : _______________

$f^{-1}(0)$: ____________ Variation : ______________ Extremum : _________________

$f^{-1}(x) < 0\ \forall x \in$ ____________ $f^{-1}(x) > 0\ \forall x \in$ ____________ Équation de l'asymptote: _______

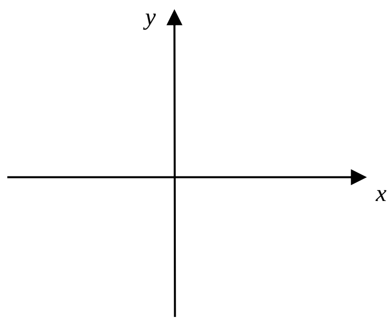
La fonction exponentielle de base	La fonction logarithmique de base
La base c : ____________________	La base c : ________________________
Possède une ordonnée à l'origine (et aucun zéro)	Possède un zéro (et aucune ordonnée à l'origine)
Une puissance exponentielle est toujours strictement ____________________	L'argument de la fonction logarithmique doit être strictement ______________________
Possède une asymptote _________________ Son équation est ______________________	Possède une asymptote _________________ Son équation est ______________________

<u>LES 4 MODÈLES DE LA FONCTION LOGARITHMIQUE</u> avec **(c > 1)**

Une fonction logarithmique de base c transformée par les 4 paramètres a, b, h et k s'écrit de la façon suivante :

$$f(x) = a \log_c (b\,(x - h)) + k$$

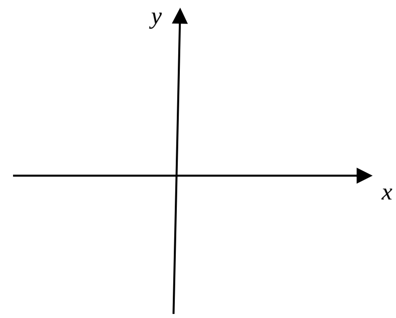
Modèle 1 : $a > 0$ et $b > 0$



Domaine : _______________

Variation : _______________

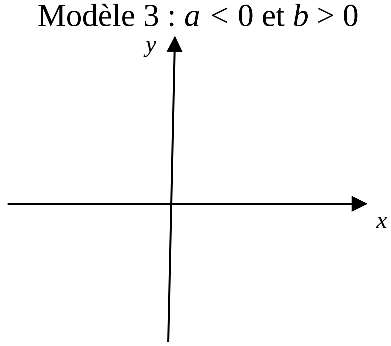
Modèle 2 : $a > 0$ et $b < 0$



Domaine : _______________

Variation : _______________

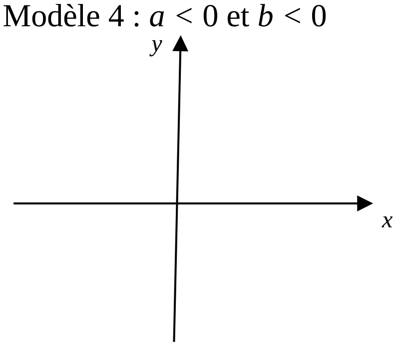
Modèle 3 : $a < 0$ et $b > 0$



Domaine : _______________

Variation : _______________

Modèle 4 : $a < 0$ et $b < 0$



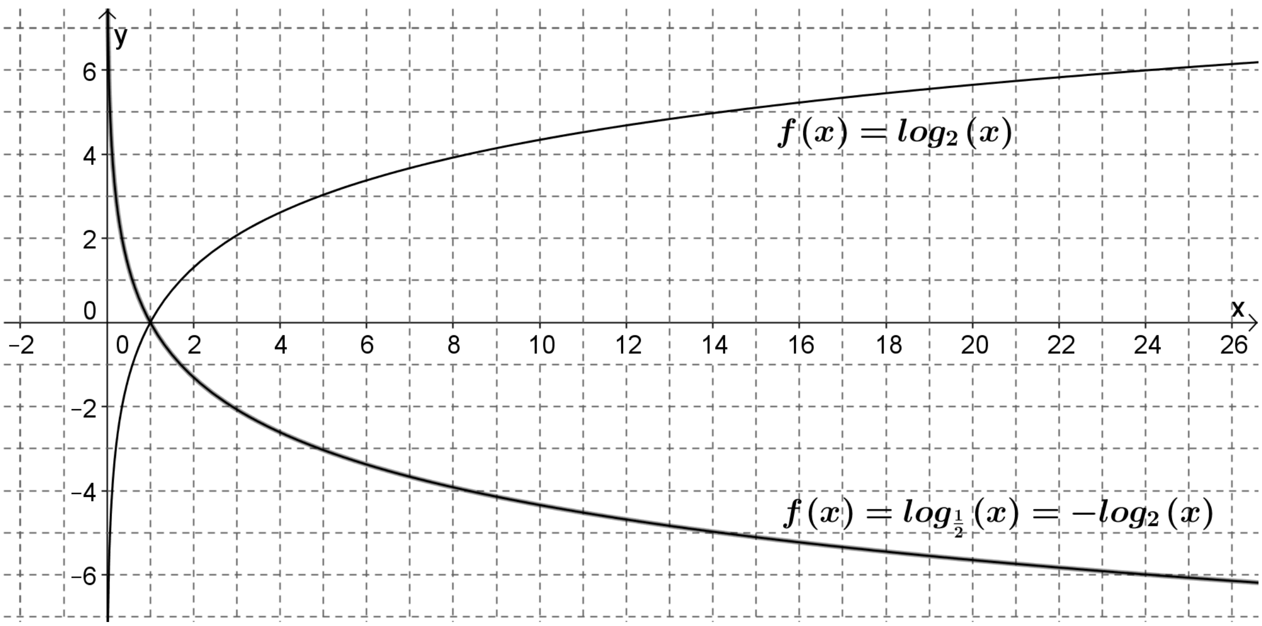
Domaine : _______________

Variation : _______________

- L'équation de l'asymptote de la fonction logarithmique transformée est : __________
- La fonction logarithmique possède une ordonnée à l'origine lorsque ______________

LA BASE ET LE PARAMÈTRE *a*

Grâce à une propriété des logarithmes, il est possible de réécrire la règle d'une fonction logarithmique dont la base est inférieure à 1 en une règle équivalente de base supérieure à 1.



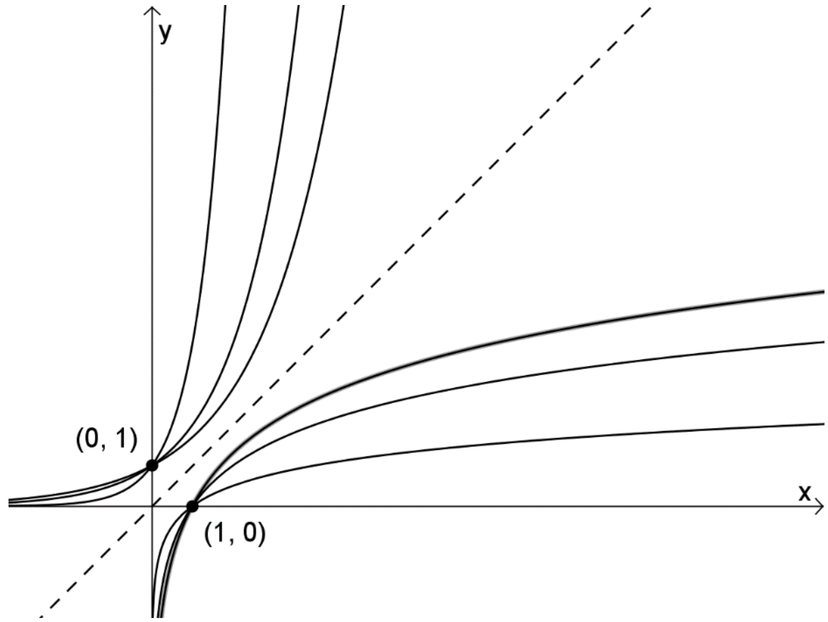
Si une fonction logarithmique est présentée avec une base inférieure à 1, nous allons toujours inverser sa base (et changer le signe du logarithme), sinon il faudrait connaître 8 modèles de fonctions…

$f(x) = a \cdot \log_c\left(b(x-h)\right) + k$

- $c > 1$
  - $a > 0$
    - $b > 0$
    - $b < 0$
  - $a < 0$
    - $b > 0$
    - $b < 0$
- $0 < c < 1$
  - $a > 0$
    - $b > 0$
    - $b < 0$
  - $a < 0$
    - $b > 0$
    - $b < 0$

RÔLE DE LA BASE D'UNE FONCTION LOGARITHMIQUE

Voici le graphique de 3 fonctions exponentielles : $f(x)=(1{,}7)^x$, $g(x)=(2)^x$ et $h(x)=4^x$ ainsi que leur réciproque.



Conclusion : Plus la base c de la fonction $f(x)=\log_c(x)$ est grande, ______________________

____

Exercice

On considère la fonction : $f(x)=\log_c x$ Complète par le symbole « > » ou « < » qui convient.

a) $c>1$ et $x>1$ donc $\log_c x$ ___ 0

b) $c>1$ et $0<x<1$ donc $\log_c x$ ___ 0

c) $0<c<1$ et $0<x<1$ donc $\log_c x$ ___ 0

d) $0<c<1$ et $x>1$ donc $\log_c x$ ___ 0

Faire l'étude des fonctions suivantes .

Domaine, Codomaine, Zéro, Ordonnée à l'origine, Équation de l'asymptote et règle de la réciproque

NOTE : Les domaines doivent TOUJOURS être obtenus algébriquement !!!!

a) $f(x) = \log_3(-x + 3) - 2$

b) $g(x) = 3\log_{1/4}(-(1 + x))$

Les populations

Depuis 1910, des experts ont étudié la croissance démographique de deux villes voisines dans le *domaine* de *MathLand*. Ils ont observé que la population de *Sainte Asymptote* a varié selon la règle $P_1(t) = 20(1{,}015)^t$ où P_1 est exprimé en milliers d'habitants et *t*, en années. À la fin des observations, la population était de 88 641 habitants.

Pendant la même période, la population de *LogValley* a évolué selon la règle $P_2(t) = 35\log_{1/4}(t+1) + 216$ où P_2 est également exprimé en milliers d'habitants.

a) Détermine le taux de croissance annuel moyen de chacune de ces deux villes.

b) Pendant les 2 années suivant cette première phase d'observation, la croissance démographique de *Sainte Asymptote* a changée et a suivi le modèle $P_3(t) = a(1{,}01)^{b(t-h)}$ où P_3 est exprimé en habitants.
Donne la règle complète de cette dernière fonction sachant que le taux de croissance annuel moyen est demeuré le même que pendant la période précédente.

Faites vos calculs ici et poursuivez-les à la page suivante.

PENDANT CE TEMPS, CHEZ LES ARVIZET…

Madame et Monsieur Arvizet ont tous les deux reçu une lettre leur rappelant qu'ils n'avaient fait aucune opération dans leurs comptes bancaires depuis plusieurs années.

La lettre était accompagnée d'un historique de leurs soldes.

COMPTE DE MADAME ARVIZET

Année	**2009**	**2010**	**2011**	**2012**	**2013**	…
Solde du compte au 1^{er} septembre…	837,34 $	925,06 $	1028,57 $	1150,72 $	1294,84 $	…

COMPTE DE MONSIEUR ARVIZET

Année	**2010**	**2011**	**2012**	**2013**	**2014**	…
Solde du compte au 1^{er} janvier…	723,71 $	889,15 $	1054,59 $	1220,03 $	1385,47 $	…

a) En supposant que le solde de chaque compte continue d'évoluer de la même façon pour les années à venir, lequel atteindra 2000$ en premier?

b) Selon ces tendances, en quelle année et à quel mois le premier 2000$ sera-t-il atteint?

RECHERCHE DE LA RÈGLE D'UNE FONCTION LOGARITHMIQUE

La recherche de la règle d'une fonction logarithmique peut être lourde et fastidieuse. En effet, rechercher une règle du modèle $f(x) = a \cdot \log_c b(x-h) + k$ nous demande de trouver les valeurs de 5 inconnues…

Pour éviter ce lourd travail, il serait futé de chercher autre chose...

Faites vos calculs à la page suivante.
Exercice 1 :
Déterminer la règle de la fonction logarithmique *g* passant par les points A(2,0), B $(1{,}05\ ;\ 2)$ et ayant son asymptote en *x* = -3

Exercice 2 :
Déterminer la règle de la fonction logarithmique *h* passant par les points A$\left(10\ ;\ \frac{-3}{2}\right)$, B $(14\ ;\ -2)$ et ayant son asymptote en *x* = 6

Exercice 3 :
Déterminer la règle de la fonction logarithmique *j* passant par les points A(66,6 ; 3), B $(478{,}2\ ;\ 4)$ et ayant son asymptote en *x* = -2

DÉFI :
Déterminer la position de l'asymptote à la fonction logarithmique *f* de base 1/2 passant par les points A$(-42\ ,\ -5)$, B$(-18\ ,\ -3)$ et C$(-12\ ,\ -1)$.

Calculs...

EXPO & LOG - EXERCICES

Exercice 1 : Simplifie chacune des expressions suivantes et donner la réponse à l'aide d'exposants positifs seulement.

Faites vos calculs à la page suivante.

a) $\left(a^{-5}\right)^2 \cdot \left(a^{-2}b^3\right)^2 \cdot \left(a^{3/2}b^{-3}\right)^2 =$

b) $\left(-x^4y^2\right)^2 \cdot \left(-5x^{-1}y\right)^3 =$

c) $\left(x^3\right)^{a-1} \cdot \left(x^a\right)^2 \cdot x^{2+a} =$

d) $\left(\dfrac{27a^{-2}b^3}{\left(3ab^{-1}\right)^2}\right)^{-2} =$

e) $\left(\dfrac{27a^3}{7b^4}\right)^2 \div \dfrac{\left(3a^{-1}\right)^2}{7^3b^5} =$

f) $\dfrac{\left(b^2\right)^{n+1}}{\left(b^n\right)^{-3}} \cdot \dfrac{\left(b^{n+1}\right)^{-3}}{\left(b^3\right)^{n-2}} =$

g) $\dfrac{5^{-m}}{15^{-m}} \cdot 3^2 =$

Calculs…

Faites vos calculs à la page suivante...

h) $\left(a^{-3}b^{2}\right)^{-2}\cdot\left(\sqrt{a}\cdot b^{-1}\right)^{2}=$

i) $\left(\sqrt[3]{2}\cdot a^{-5}b^{-1}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{2^{2}}\cdot a^{3}b^{-2}\right)=$

j) $\left(a^{-1/2}b^{3/4}\right)^{3}\cdot\left(\sqrt{ab^{3}}\right)=$

k) $\left(\sqrt[4]{a^{2}b^{-3}}\right)\cdot\left(\sqrt{a}\cdot b^{-2}c^{-1}\right)^{-1/2}=$

l) $\dfrac{16^{-a}}{12^{-a}}\cdot\dfrac{3^{-a}}{8}=$

m) $\left(\dfrac{12a^{2}b^{-4}c^{14}d^{-2}}{12^{2}a^{2}b^{-5}d^{10}}\right)^{-1}=$

n) $\dfrac{3^{2}\cdot 9^{2}\cdot 16^{-4}\cdot 81^{2}}{4^{3}\cdot 32^{5}}=$

o) $\left(-4^{-2}p^{4}q^{5}\right)^{3}\div\left(p^{2}q^{-3}\right)^{4}=$

p) $\left(\dfrac{3^{2}x^{6}y^{-4}}{4^{2}\left(x^{3}\right)^{-1}y^{5}}\right)^{-3}\div\left(\dfrac{9^{2}xy^{4}}{8^{4}x^{-3}y^{0}}\right)^{2}=$

q) $\left(\dfrac{a+6}{a-6}\right)^{8}\cdot\left(\dfrac{a-6}{a+6}\right)^{6}\div\left(\dfrac{a-6}{a+6}\right)^{14}=$

Calculs…

Faites vos calculs à la page suivante.

r) $\dfrac{(-2a)^3(-3b)^4(-4a^2)^{-5}}{b^{10}} =$

s) $\dfrac{(-x^3y)^4}{y^{-2}} \div \left(\dfrac{xy^6}{-3x^{-1}y^6}\right)^3 =$

Exercice 2: Le rayon de la Lune est d'environ 1.7 X 10^3 km et celui de la Terre est 3,75 fois plus grand que celui de la Lune. Le rayon de la planète Saturne est 9,4 fois plus grand que celui de la Terre.

a) Calcule le volume de la Lune $\left(V = \dfrac{4\pi r^3}{3}\right)$

b) Calcule l'aire de la surface terrestre $(A = 4\pi r^2)$

c) Combien de fois le volume de Saturne est-il supérieur à celui de la Lune?

Exercice 3: Les porte-voix ont un rayon qui augmente de manière exponentielle. La forme d'un porte-voix permet de transmettre assez uniformément toutes les fréquences sonores.

a) Dans un plan cartésien, dessine la vue de côté d'un porte-voix à l'aide des courbes d'équation $y = 0{,}5(1{,}5)^x$ et $y = -0{,}5(1{,}5)^x$ sur l'intervalle $[-1\ ,\ 4]$

b) Quel est le diamètre de chacune des extrémités du porte-voix si les mesures sont exprimées en décimètres?

Exercice 4: Résous algébriquement les équations exponentielles suivantes :

a) $5^{8-x} = 25^{2x+13}$

b) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = 4^{10}$

c) $\left(\sqrt{2}\right)^{x+1} = 8^{-3x}$

d) $2\left(\dfrac{1}{3}\right)^{7-2x} = 162$

e) $4^{5x+7} = 8^{x-7}$

f) $125\,(25)^x = 5^8$

Calculs…

Faites vos calculs à la page suivante.

Exercice 5 : Soit une fonction exponentielle de la forme : $f(x)=a\cdot(c)^{x-h}+k$. Indiquer si les énoncés suivants sont vrais ou faux.

a) Seule la valeur du paramètre k influence la position de l'asymptote.

b) La fonction est décroissante si $a < 0$.

c) La fonction possède un extremum dont la valeur correspond à celle de k.

d) L'asymptote à la courbe de la fonction réciproque est verticale.

Exercice 6: Détermine, s'il existe, le zéro de chacune des fonctions suivantes :

a) $f_1(x)=3\cdot(2)^{x-3}-96$

b) $f_2(x)=10-15\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2}$

c) $f_3(x)=7{,}5\cdot(6)^{-x}+6$

d) $f_4(x)=0{,}2\cdot(0{,}85)^{x-5}-0{,}2$

Exercice 7: Soit f et g des fonctions définies par les règles $f(x)=2\cdot\left(3^{-2x}-5\right)$ et $g(x)=2\left(\frac{1}{9}\right)^{4x}-10$. Détermine algébriquement pour quelles valeurs de x on a :

a) $f = g$

b) $f > g$

c) $f < g$

Exercice 8: Un analyste financier examine les actifs de 2 compagnies depuis leur fondation il y a 5 ans. L'actif de la compagnie 1 est donné par la règle $A_1=10\,000\cdot(2)^{0,5t}$ et celui de la compagnie 2 évolue selon le modèle $A_2=625\cdot(4)^{0,75t}$ où t est exprimé en années.

a) À quel moment l'actif de la compagnie 1 était-il le double de celui de la compagnie 2?

b) Après combien de temps les deux compagnies ont-elles eu le même actif?

Calculs…

Faites vos calculs à la page suivante.

<u>Exercice 9</u>: Vrai ou faux?

a) L'ordonnées à l'origine de la courbe d'équation $y=(e)^x$ est *e*.

b) En algèbre, il est astucieux d'employer la lettre *e* pour nommer une variable dans une mise en contexte lorsqu'on cherche un nombre de quelque chose dont la première lettre est *e*!

<u>Exercice 10</u>: Le rapport financier d'une compagnie minière montre que la masse salariale *m* versée aux employés pour les années 1997 à 2007 a varié selon la règle $m=0{,}8(e)^{0{,}245\,t}+1{,}4$ où *m* est exprimé en millions de dollars et *t* en années depuis 1997.

a) Quelle a été l'augmentation de la masse salariale pendant cette période?

b) En quelle année la masse salariale a-t-elle dépassé 6 000 000$?

<u>Exercice 11</u>: Trouve la valeur de *x* qui vérifie les équations exponentielles suivantes :

a) $3^x=27\sqrt{3}$

b) $5^{-x}=5\cdot\sqrt[3]{5}$

c) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x+1}=16\cdot\sqrt[3]{2}$

d) $3^x\cdot\sqrt{3}=9^{2x}$

e) $\left(\frac{1}{9}\right)^{x+2}=3\sqrt{3}$

f) $2^{-3x}=\frac{\sqrt{2}}{8}$

<u>Exercice 12</u>: Résous les équations exponentielles suivantes :

a) $3^{2x+3}\cdot 9^x=81^{1-x}$

b) $5^{2x-1}\cdot 5^{x+3}=1$

c) $\frac{4^{3+x}}{2^x}=\frac{1}{8^x}$

d) $8^{x-1}\cdot\frac{1}{4}\cdot 2^{x+1}=16^{-1}$

e) $\frac{9^x}{2^{2x}}=\frac{4}{9}$

f) $\frac{27^x}{243}=9^x\cdot 3^{-x}$

Calculs…

Faites vos calculs à la page suivante.

Exercice 13: Trouve l'ensemble solution des équations suivantes.

a) $4^x \cdot \sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{2^{-1}}\right)^2 = 2^{x+1}$

c) $9^{x+1} \cdot \sqrt{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 27^{-x}$

e) $8^{2x} \cdot \sqrt[3]{4^x} = \frac{1}{32}$

b) $\sqrt[3]{7^x} \cdot \frac{1}{7} = 343 \cdot 7^x$

d) $5^{x+3} \cdot 5^{x-1} = \frac{1}{25}$

f) $\left(3^{-2}\right)^{x+1} \cdot \frac{1}{9^x} = \frac{1}{81}$

Exercice 14: Résous les équations suivantes.

a) $\left(27^x\right)^{-2} = \left(9^{x+1}\right)^2$

b) $\left(4^{x/3}\right)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{8^x}} = 16$

c) $\left(125^{x-1}\right)^{-2} \cdot \sqrt{25^x} = \frac{\left(5^{-2}\right)^{x+2}}{25^{-x}}$

Exercice 15: Résous chacune des équations suivantes.

a) $5 \cdot 2^x = 40$

c) $30 \cdot 5^{-x+2} = 6$

e) $9 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{x+1} = 72$

b) $8 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2x} = \frac{8}{27}$

d) $5 \cdot 3^{x/2} = 135$

f) $35 \cdot 7^{x+3} = \frac{5}{7}$

Exercice 16: Résoudre.

a) $\left(3 \cdot \sqrt[3]{9}\right)^x = \frac{1}{9}$

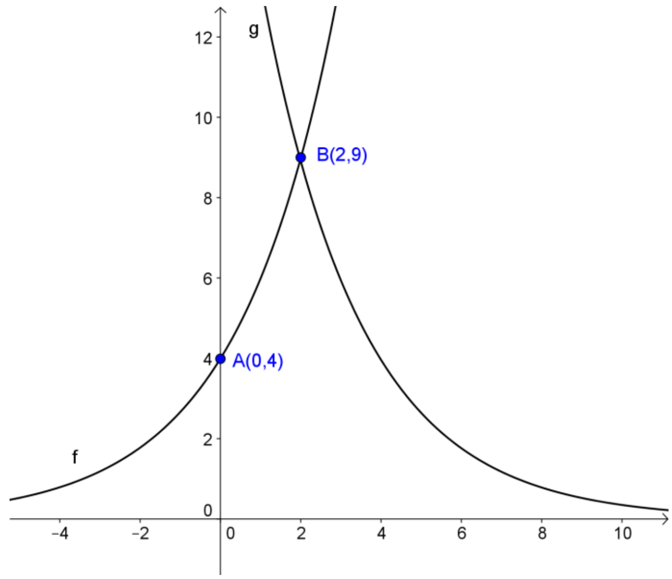
b) $\left(5^{3-x}\right)^2 \cdot 125^{-1} = 25^{x+1}$

c) $\left(8 \cdot \sqrt{2}\right)^x = 16$

Calculs…

Faites vos calculs à la page suivante.

<ins>Exercice 17</ins> : Voici deux fonctions exponentielles f et g symétriques par rapport à la droite d'équation $x = 2$. Détermine la règle de chaque fonction sachant qu'elles sont asymptotiques à l'axe des abscisses.



<ins>Exercice 18</ins>: Soit la fonction exponentielle d'équation $f(x) = -27\left(\frac{1}{3}\right)^{-x+3} + \frac{1}{9}$

SANS CALCULATRICE, déterminer :

a) Sa règle sous la forme $f(x) = a(c)^x + k$

b) Dom f

c) Codom f

d) Zéro de f

e) Les intervalles liés aux signes de la fonction

f) Son sens de variation

g) $f(0)$

h) Équation de l'asymptote

Calculs…

Faites vos calculs à la page suivante.

Exercice 19 : Résous algébriquement chacune de ces inéquations

a) $0{,}5 \cdot (5)^x > \dfrac{125}{2}$ b) $2\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x+2} - 18 < 0$ c) $\left(e^{3x}\right)^2 > \left(\dfrac{1}{e}\right)^3$

Exercice 20: Résous algébriquement les équations suivantes.

a) $e^{2x+3} = \left(\dfrac{1}{e}\right)^{-19}$ b) $e^6 + 2 = \left(e^{2x}\right)^3 + 2$ c) $\dfrac{(2e)^3}{e^2} = 8e^{x+3}$

Exercice 21 : Écrire les expressions suivantes sous la forme d'une somme ou d'une différence de logarithmes.

a) $\log_2\left(5^3 \times 7\right)$ b) $\log_3\left(\dfrac{8}{11}\right)^2$ c) $\log\sqrt{6 \times 5}$ d) $\log_{1/4} \dfrac{5 \times \sqrt{7}}{3}$

Exercice 22 : Écrire sous la forme d'un logarithme d'une seule expression.

a) $\log_3 7 + 2\log_3 5$

b) $\dfrac{1}{2}\left(\log_a 3 + \log_a 5\right) - \log_a 2$

c) $\log_2 15 - 3\log_2 7 - \log_2 5$

d) $2\log_6 x - \log_{1/6} y - \dfrac{1}{2}\log_6 a - \log_6 b$

Exercice 23 : SANS CALCULATRICE, trouve la valeur des expressions suivantes.

a) $\log_3 \dfrac{\sqrt[4]{3}}{3}$

b) $\log_2\left(\dfrac{24}{3}\right)^{-2}$

c) $\log_a \sqrt{21}$
(si $\log_a 3 = c$ et $\log_a 7 = d$)

d) $10^{\log 3}$

e) $\dfrac{\log_3 81}{2} + \log_3\left(\dfrac{27}{3}\right)$

f) $\log_2 8 - \log_2 2^4 - \left(\log_2 4\right)^2$

Calculs…

Faites vos calculs à la page suivante.

Exercice 24 :

Écrire une expression en x équivalente à $\log_b \sqrt{\frac{6}{2b}}$ sachant que $\log_b 3 = x$.

Exercice 25 : DÉFI!

Calculer la valeur de $\frac{x}{y}$ $(y \neq 0)$, sachant que $2\log_5(x-3y) = \log_5(2x) + \log_5(2y)$.

Conseil : Factoriser un polynôme quadratique ou faire par un changement de variables…

Exercice 26 : La fonction $f(x) = 1500 \cdot \log_6(2x)$ donne le profit en dollars qu'une compagnie peut réaliser dans x mois, après une campagne de publicité. Quel serait le profit dans :

a) 3 mois? b) 8 mois?

Exercice 27 :

Déterminer les coordonnées du point d'intersection des courbes définies par les règles suivantes : $f(x) = \log(x-2)$ et $g(x) = 1 - log(x+1)$

Calculs…

Monsieur Arvizet change de cap! - SAÉ

Le 27 avril 1981, après avoir pris sa retraite de la marine, Monsieur Arvizet a acheté une voiture décapotable au coût de 8 000$. Au cours des 6 premières années, son auto perdait 15% de sa valeur annuellement. Durant les 4 années suivantes, la valeur du véhicule est demeurée stable. Par la suite, la rareté et l'attrait de ce modèle ont fait qu'elle est devenue une pièce de collection. Cela a eu pour effet d'augmenter sa valeur de 2% à chaque mois.

a) Donner la règle permettant de déterminer la valeur V de la voiture selon le nombre d'années écoulées depuis la date d'achat.
b) À ce rythme, en quelle année et pendant quel mois, la voiture valait-elle le même prix que lors de son achat ?

Conseil : travailler en valeurs exactes, non arrondies.

Suite…

Réponse : ________________________________

Résolution de problèmes

Exercice 1 : Un élément radioactif se désintègre de telle sorte qu'il ne reste que les trois cinquièmes de sa masse initiale après 10 ans. Si on dispose de 80 g de cet élément à un moment donné, dans combien d'années ne restera-t-il que le cinquième de la masse initiale?

Exercice 2 : Monsieur Arvizet a placé 3000$ à un taux d'intérêt annuel de 4,5% capitalisés aux 4 mois. À ces conditions, en combien d'années le capital aura-t-il doublé? (arrondir au dixième)

Exercice 3 : À quel taux faudrait-il placer une somme d'argent pour qu'elle double en sept ans, si les intérêts sont capitalisés annuellement?

Exercice 4 : On estime que la valeur V d'une machine dans t années est donnée par la fonction $V = V_0 \cdot (e)^{-0,07t}$ où V_0 est la valeur initiale de la machine. Dans combien d'années cette machine vaudra-t-elle le quart de sa valeur initiale?

Exercice 5 : a) Monsieur Arvizet établit que la règle $p = 1,5\log(2x+2)$ donne le profit en milliers de dollars qu'une entreprise espère réaliser dans x mois, suite à une campagne publicitaire.

a) Dans combien de mois le profit sera-t-il de 1500$?

b) Quel sera le profit dans 10 mois ?

Calculs…

Faites vos calculs à la page suivante.

Exercice 6 : Le nombre de bactéries dans une culture triple toutes les deux heures.

a) Donne la règle de la fonction qui exprime le nombre N de bactéries présentes dans une culture au bout de t heures s'il y avait initialement N_0 bactéries.

b) Donne la règle de la fonction qui permet de calculer le nombre t d'heures écoulées pour obtenir les N bactéries.

Exercices de révision sur l'ensemble du chapitre

1) Soit les fonctions $f(x) = 2^{2x-1}$ et $g(x) = 10^{3-x}$. Quelles sont les coordonnées du point de rencontre de ces deux fonctions?

2) Soit la fonction : $f(x) = \log_{\left(\frac{1}{4}\right)}(x+2) - 3$

Évaluez :

a) $f(0)$:______ b) x, si $f(x) = -3$:____

c) $f(6)$: ______ d) x, si $f(x) = -4$:____

3) Trouver la valeur de :

$$\frac{\log_{\left(\frac{1}{2}\right)} 4^3 - \log_2\left(\frac{1}{64}\right)}{\log_5 5 + \log_3 1}$$

4) Résoudre l'équation suivante :

$$\log_2(x^2 + 3x - 2) = 3$$

5) La fonction définie par $f(x) = \log_2(-5x-1) - 2$ est-elle croissante ou décroissante dans l'intervalle $]-5,-1]$?____________________

Calculs…

Faites vos calculs à la page suivante.

6) Considérant l'égalité suivante $log_r(b) = n$
ainsi que les expressions *BASE, PUISSANCE EXPONENTIELLE* et *EXPOSANT*

Compléter les 3 énoncés ci-dessous à l'aide des expressions proposées plus haut.

- *b* joue le rôle de ____
- *r* porte le nom de ____
- *n* est un ____

7) La fonction définie par $f(x) = -\log_{\left(\frac{9}{7}\right)}(2x+3) - 1$ est-elle croissante ou décroissante dans l'intervalle $]2,8]$? ______________________________

8) On considère la fonction $f(x) = c^x$ et la fonction transformée $g(x) = c^{x-h}$ $(h \neq 0)$
VRAI ou FAUX ?

a. On obtient le graphique cartésien de *g* à partir du graphique cartésien de *f* par une translation horizontale.__________
b. Si *h* est positif, la translation s'effectue vers la droite et si *h* est négatif, la translation s'effectue vers la gauche.____________
c. La fonction *g* n'admet jamais de zéro.___________
d. L'axe des abscisses est toujours l'asymptote au graphique cartésien de la fonction *g*._________
e. Si $c > 1$, *g* est croissante et si $0 < c < 1$, *g* est décroissante.____________
f. La fonction *g* peut être négative pour certaines valeurs de *h*.___________

9) La solution de l'équation exponentielle $8 \cdot 5^x + 5^{x-2} - 5^{x+1} = 380$ appartient à l'intervalle :

a) $[0,2[$ b) $[-2,0[$ c) $[2,4[$ d) $[-4,-2[$

Calculs…

Faites vos calculs à la page suivante.

10) Quelle est l'équation de l'asymptote et le zéro de la fonction définie par :

$$f(x) = \log_{\left(\frac{2}{3}\right)}(4x-2)-1$$

11) Résoudre l'équation logarithmique suivante :

$$\log(x+5)-\log(x-1)=\log(x-1)$$

12) Résoudre l'équation logarithmique suivante :

$$\log_c(x+1)+\log_c(x-2)=\log_c 5+\log_c 2$$

13) Résoudre l'équation logarithmique suivante :

$$\log_{\left(\frac{1}{2}\right)}\left(x^2+3\right)-\log_{\left(\frac{1}{2}\right)}\left(x^2-4\right)=-3$$

14) Sachant qu'une fonction logarithmique *f* passe par les points A(-10 , 1) , B(-4, 3) et qu'elle possède une asymptote d'équation x = -2, détermine la règle de *f* **en présentant votre réponse avec une base supérieure à 1**.

15) Détermine l'ordonnée à l'origine de la fonction définie par la règle

$$j(x)=\frac{1}{2}\log_3\left(\frac{1}{3}-3x\right)-1$$

16) Quelles valeurs pouvons-nous donner à t pour que la fonction définie par $g(x)=\left(2t-\frac{3}{2}\right)^x$ soit une fonction exponentielle décroissante?

Calculs…

Faites vos calculs à la page suivante.

17) Soit les fonctions :

$$f(x)=4^x \quad ; \quad g(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^x \quad ; \quad h(x)=\log_4 x \quad \text{et} \quad j(x)=\log_{\left(\frac{1}{4}\right)} x$$

Quelle distance sépare l'intersection de f et g de l'intersection de h et j ?

a) 1 unité b) $\sqrt{2}$ unités c) $\sqrt{3}$ unités d) 2 unités

18) Résoudre : $15^{2x}\cdot 34=291\cdot(16)^{x-1}$

19) Résoudre l'inéquation suivante : $\left(\frac{1}{9}\right)^{2x+4}\leq\frac{1}{81}$

20) Résoudre :

a) $\log_{\sqrt{x}} x+\log_x 16=4$ b) $16\sqrt{72}=3(2)^{3x+6}$ c) $\frac{5^{3x}}{8^x}\leq\frac{2}{5}$

21) Détermine la règle de la réciproque de ces deux fonctions :

a) $f(x)=2\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2}-4$ b) $g(x)=3(2)^{3-2x}-2$

22) Le montant initial M_o d'un placement à un taux d'intérêt i évolue en fonction du temps écoulé depuis le début de ce placement en années t. On sait qu'après une année, la valeur du placement est 4815$ et qu'après 5 ans cette valeur est de 6311,48$.
Après combien de temps le placement initial sera-t-il augmenté d'au moins 3500$ sachant que les intérêts sont capitalisés seulement une fois l'an ?

Calculs…

Faire vos calculs à la page suivante.

23) Un distributeur de gaz propane s'aperçoit qu'un de ses réservoirs fuit. Il évalue que la fuite occasionne une perte de 3% du contenu du réservoir à chaque jour. Après combien de temps le réservoir contiendra-t-il les 80% de son contenu initial?

24) Quelle est la valeur de $\log_c 3$ si $log_c(12) = 1{,}277$ et $log_c(2) = 0{,}356$?

25) Sachant que $\log_c 2 = x$; $\log_c 3 = y$; $\log_c 5 = z$, exprimer $\log_c\left(\frac{4\sqrt{6}}{15}\right) - 3\frac{\log_4 5}{\log_4 c}$ en terme de *x*, *y* et *z*.

26) Détermine la valeur de : $\log\left(\frac{3}{2}\right)+\log\left(\frac{4}{3}\right)+\log\left(\frac{5}{4}\right)+\ldots+\log\left(\frac{200}{199}\right)$

27) Déterminer la (ou les) valeur(s) de *x* solution(s) de

$$12^{2x+1} = 2^{3x+7}\cdot 3^{3x-4}$$

28) Déterminer les valeurs de *x* et *y* pour lesquelles

$$x^3y^5 = 2^{11}\cdot 3^{13} \quad \text{et} \quad \frac{x}{y^2} = \frac{1}{27}$$

29) Si $\log_8 3 = k$ exprimer $\log_8 18$ en fonction de *k*.

Calculs…

Faites vos calculs à la page suivante.

DÉFIS POUR LES *ROCK STAR*

30) La courbe représentative de $y = ax^r$ passe par les points A(2,1) et B(32,4). Déterminer la valeur de r.

31) Démontrer la propriété suivante : $\log_{c^n}(b) = \frac{1}{n}\log_c(b)$

32) Soit A(x_a, y_a) et B(x_b, y_b) deux points de la courbe $f(x) = \log_n(x)$. On considère une droite horizontale qui passe par le milieu du segment AB. Cette droite coupe la courbe au point C(x_c, y_c). Démontrer que $(x_c)^2 = x_a \cdot x_b$

33) Résoudre les 2 équations exponentielles suivantes :
Conseil : un changement de variables peut être utile…

a. $2^{2x+2} = 17 \cdot 2^x - 4$

b) $e^x - \frac{4}{e^x} + 3 = 0$

34) Donner le domaine de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = e^{x+0.5}$

b) $f(x) = -\log_{7/2}(-2x) + 5$

c) $f(x) = \frac{2 \cdot 3^{-x}}{4\ln(x+1)}$

d) $f(x) = \sqrt{e^x - e}$

e) $f(x) = \frac{1}{2\log(x-10) - 8}$

f) $f(x) = \frac{\ln(-x)}{\log(-x^2 - 16x - 48)}$

g) $f(x) = \log(|x|)$

h) $f(x) = -\log_4\left(9 - \sqrt{x^2 - 4}\right)$