Collège Regina Assumpta

Mathématique SN5

Chapitre sixième – Lieux géométriques et coniques

Nom: ____________________________________

Groupe: 5_____

LES LIEUX GÉOMÉTRIQUES

Par définition, un *lieu géométrique* est un ensemble de points ayant une propriété métrique commune. Cette propriété est toujours liée au concept de distance.

Exercice

Voici quelques définitions de lieux géométriques connus. Essayons de les nommer.

a) Lieu d'un point situé à égale distance des extrémités d'un segment de droite :

____

b) Lieu d'un point situé à égale distance de deux demi-droites d'origines confondues:

____

c) Lieu d'un point situé à égale distance d'un point fixe :

____

Formules que vous **devez** connaître…

a) Point milieu M d'un segment AB

$$M\left(\frac{x_A + x_b}{2} \;,\; \frac{y_A + y_b}{2}\right)$$

b) Distance entre deux points A et B

$$d(A\,,\,B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

Exercice 1 : Trouver l'équation du lieu de $P(x, y)$ sachant qu'il parcourt une droite passant par les points de coordonnées (5 , 4) et (3 , 2).

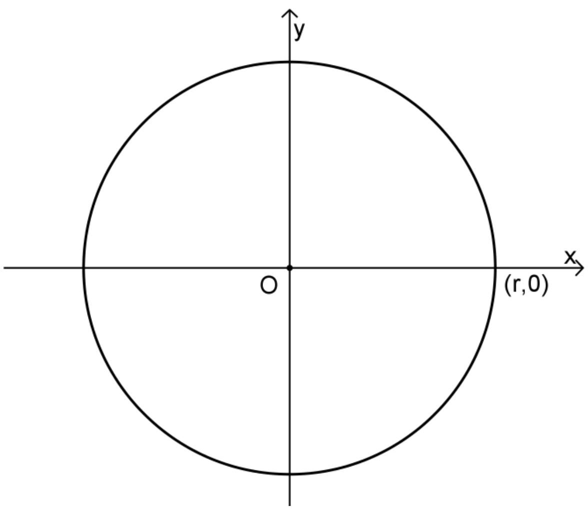
Exercice 2 : Quelle est l'équation du lieu du point *P* qui est équidistant de A(-3, -2) et B(4, 1)?

Exercice 3 : Nommer au moins 5 points qui possèdent la caractéristique suivante : « être situé à 5 unités du point O(0, 0) ».

LE CERCLE

Définition : Lieu d'un point dont la distance par rapport à un point fixe (appelé *centre*) est constante.

Cercle centré à l'origine



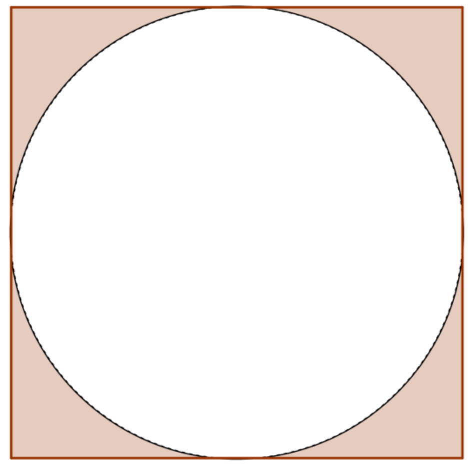
L'équation **canonique** du cercle centré à l'origine est :

Exercice 1 : Voici l'équation d'un cercle $x^2 + y^2 = 49$. Donner les coordonnées du centre du cercle et la mesure de son rayon.

Exercice 2 : Est-ce que les points suivants appartiennent au cercle décrit par la relation suivante : $x^2 + y^2 = 169$? Justifier.

a) (5, 12) b) (7 , 11) c) (0 , 13)

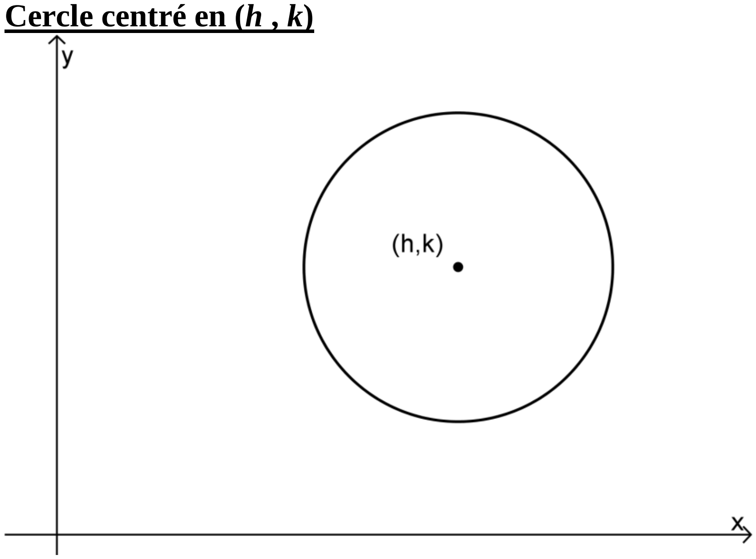
Exercice 3 : Donner l'équation d'une droite tangente au cercle d'équation $x^2 + y^2 = 36$.



Exercice 4 :
a) Quelle est l'aire de la forme ombragée (en gris) ci-contre sachant que la diagonale du carré mesure $9\sqrt{2}$ unités? (arrondir au centième)

b) Quelle est l'équation du cercle si l'on considère que le point de rencontre des diagonales est l'origine du plan cartésien ?

Cercle centré en (*h* , *k*)



L'équation **canonique** du cercle centré en (h , k) est :

En effectuant les carrés, et en ramenant l'équation égale à zéro, on retrouve la forme ___ ______________________________ de l'équation du cercle.

Écrire l'équation du cercle suivant sous sa forme générale :

$$(x+6)^2+(y-1)^2=50$$

<u>La complétion de carré</u> (les deux vidéos en ligne sont pertinents pour cette section)

Nous utiliserons cette technique pour retrouver __________________________________ si ____ nous est donnée.

À partir de la vidéo disponible en ligne, écrire les équations suivantes sous la forme canonique.

$x^2+y^2+2x-4y-6=0$ $\qquad\qquad$ $3x^2+3y^2-18x+12=0$

Exemples… Écrire les trinômes suivants sous la forme $a(x-h)^2+k$

a) $x^2+8x-11$

b) $3x^2-36x+12$

Pour ceux qui préfèrent les formules…

Si vous préférez l'usage d'une formule toute faite pour effectuer la complétion de carré, voici comment faire :

Une expression de la forme ax^2+bx devient $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}$

<u>Note importante</u>

Tenter de décrire les figures suivantes (centre et rayon)

a) $5x^2+5y^2-125=0$

b) $4x^2+2y^2=20$

Ainsi, l'équation générale **du cercle centré en (*h* , *k*)** est :

$$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \qquad \text{(avec \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_)}$$

(A, C, D et E sont des coefficients et F une constante)

Exercices *Faire vos calculs à la page suivante.*

1. Donner les coordonnées du centre de chaque cercle et donner la mesure de son rayon. Exprimer ensuite l'équation donnée sous sa forme générale.

   a) $(x-2)^2+(y-3)^2=16$

   b) $(x+4)^2+(y-2)^2=25$

   c) $(x-\sqrt{2})^2+(y+1)^2=9$

2. Exprimer l'équation donnée sous sa forme canonique.

   a) $x^2+y^2+2x-4=0$

   b) $x^2+y^2-4x+8y-36=0$

   c) $x^2+y^2-6x-2y+1=0$

   d) $x^2+y^2-8x+4y+4=0$

   e) $2x^2+2y^2+12x-4y+4=0$

3. Les équations suivantes sont-elles celles d'un cercle? Donner la mesure du rayon (s'il s'agit d'un cercle).

   a) $2x^2+2y^2+4x-12y+10=0$

   b) $x^2+2y^2+2x-4y-6=0$

   c) $x^2+y^2-4y-4=0$

   d) $x^2+y^2-6x+4=0$

   e) $x^2+y^2+2xy+4y-4=0$

   f) $x^2-y^2=16$

Discussion : (enrichissement)
Nous connaissons la forme générale du cercle centré en (h , k) :

$$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \quad (\text{avec } A=C)$$

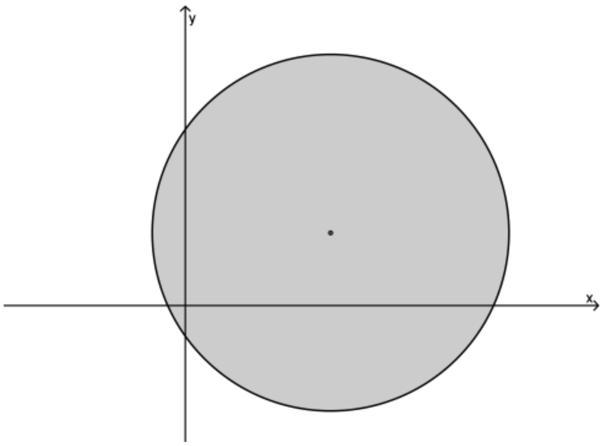
D'autres restrictions ne devraient-elles être posées sur les valeurs de D, E et F?

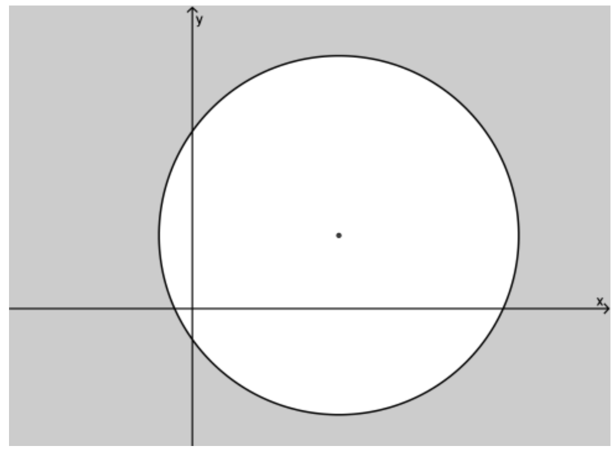
Pour vous aider à y réfléchir, tentez de décrire (centre et rayon) le *cercle* suivant :

$$3x^2+3y^2+6x-11y+100=0$$

Calculs…

<u>Régions associées au cercle</u>





$(x-h)^2+(y-k)^2 \qquad r^2$

$(x-h)^2+(y-k)^2 \qquad r^2$

<u>Note</u>
si l'inégalité est < ou > alors on trace la circonférence du cercle_________________,

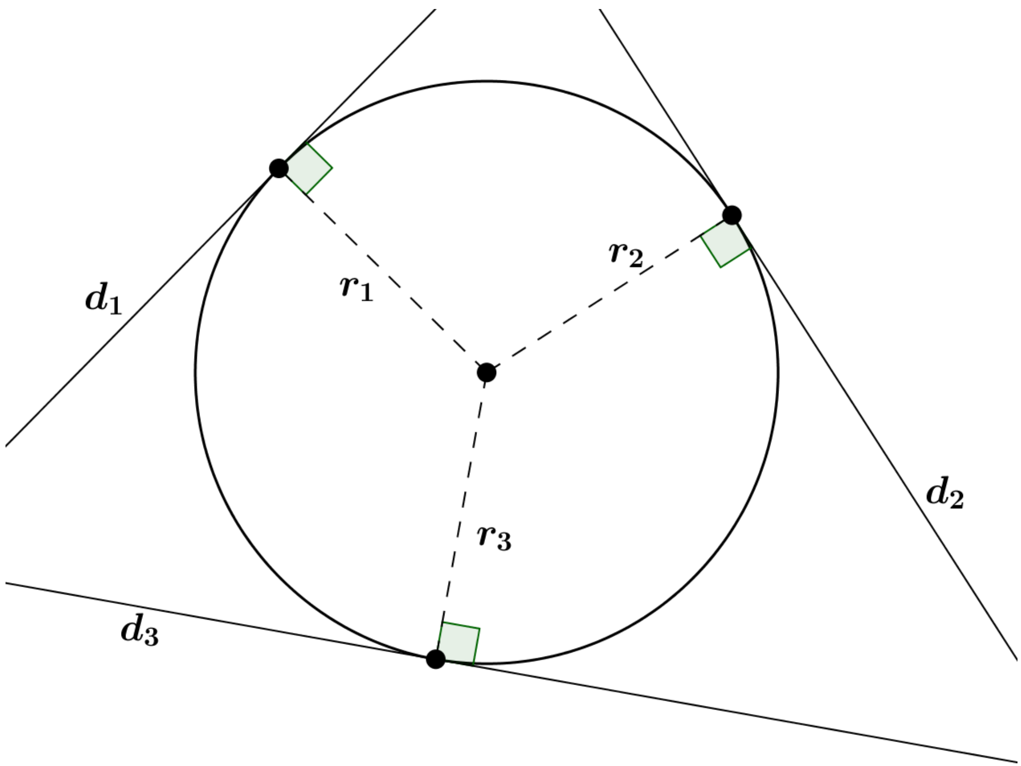
<u>Exercice 1 :</u>
À l'aide d'un raisonnement en terme de <u>distance,</u> déterminer si le point A(-3 , 7) est à l'intérieur ou à l'extérieur du cercle d'équation $(x-1)^2+(y+2)^2=100$.
Représenter par une inéquation l'ensemble des couples (x , y) situés dans la même région que le point A.

Droite tangente à un cercle

Définition de *droite tangente à un cercle* : Droite interceptant un cercle en **un et un seul point.**

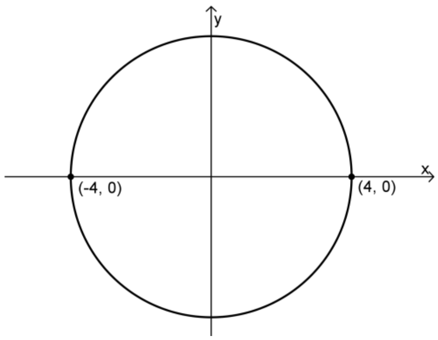
Toute droite tangente à un cercle possède une caractéristique géométrique particulière qui fait l'objet d'un théorème fort important en géométrie euclidienne et que nous allons exploiter dans la recherche de la règle d'une droite tangente à un cercle en un point donné.

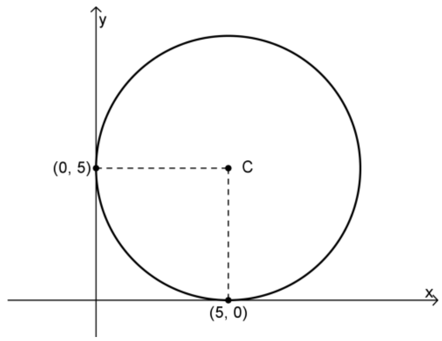
Tout rayon aboutissant au point de tangence est ____________________________________à la tangente.

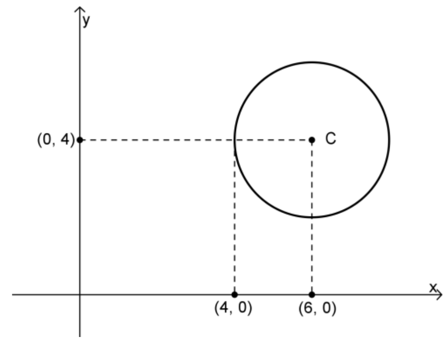


Rappel : Droites parallèles et perpendiculaires Considérant les pentes m_1, m_2 de deux droites, nous pouvons déduire la position relative des droites. En effet, lorsque :	
$m_1 = m_2$	alors les droites sont________________________________
$m_1 \times m_2 = -1$	alors les droites sont ________________________________

<u>Exercice 1</u> : Quelle est l'équation de chacun des cercles.







________________ ________________ ________________

<u>Exercice 2</u> : Déterminer les coordonnées du centre et le rayon des cercles dont les équations sont données. Indiquer ensuite si chacun des cercles passe par l'origine.

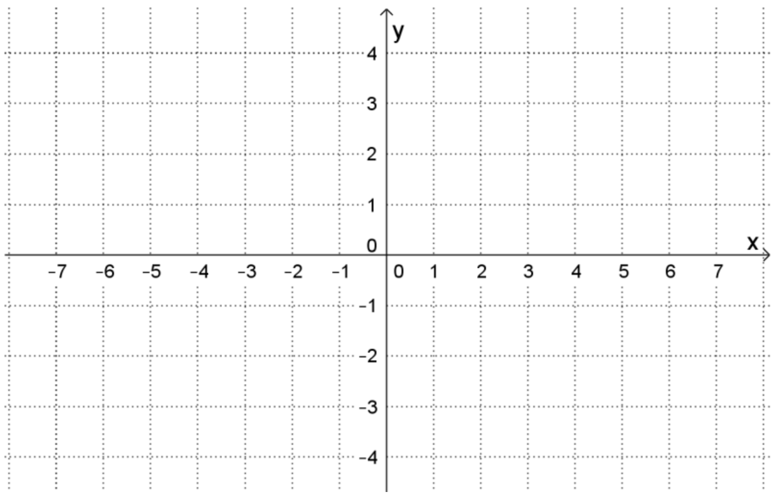
	Centre	Rayon	Passe-t-il par (0, 0) ?
a) $x^2 + y^2 = 9$	________	________	________
b) $(x-4)^2 + (y+3)^2 = 25$	________	________	________
c) $(x+2)^2 + (y-4)^2 = 20$	________	________	________

Exercice 3 : L'équation d'un cercle est : $x^2 + (y+1)^2 = 10$.

a) Quel est le rayon de ce cercle ?

b) Quelles sont les coordonnées de son centre ?

c) Représenter ce cercle dans un plan cartésien (croquis).



d) Si le point A (1, *y*) appartient au cercle, quelle est la valeur de *y* ?

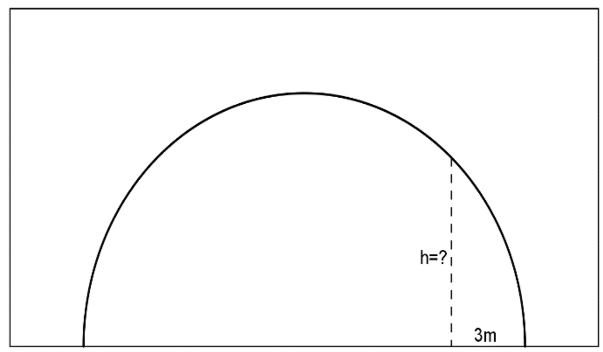
Exercice 4 : Soit les points A(-4, 5) et B(6, 1), les extrémités d'un diamètre du cercle. Quelle est l'équation de ce cercle ?

Faites vos calculs à la page suivante…

Exercice 5 : À partir des coordonnées du centre C et d'un point P du cercle, déterminer l'équation du cercle et l'équation de la droite tangente au cercle en ce point.

a) C(-2, -1) et P(3, 2) b) C(3, 0) et P(-3, 8) c) C(-1, 5) et P(5, -1)

Exercice 6 : La voûte d'un tunnel a la forme d'un demi-cercle. Sa largeur à la base est de 16m. Quelle est la hauteur de la voûte lorsqu'on se trouve à 3m du bord ? (Arrondir le résultat final au dixième près.)



Exercice 7 : Trouver le centre et le rayon des cercles dont les équations sont données.

a) $x^2 + y^2 + 8x = 0$ b) $x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0$ c) $x^2 + y^2 - 12x + 6y + 20 = 0$

Calculs…

Exercices :

1. Déterminer l'équation du cercle de centre (-2, 3) et de rayon 7.

2. Trouver l'équation du cercle dont les extrémités d'un de ses diamètres sont (3, 8) et (-5, 2).

3. Un cercle a son centre en (-5, 8) et est tangent à l'axe des ordonnées. Déterminer son équation.

4. Trouver l'équation du cercle dont on donne les coordonnées du centre O et d'un point A.
   a) O(6, 1) et A(-2, -2) b) O(-2, 0) et A(0, -4)

5. Donner les coordonnées du centre et la mesure du rayon des cercles suivants :
   a) $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 1 = 0$ b) $x^2 + y^2 - 8x + 4y + 4 = 0$
   c) $2x^2 + 2y^2 + 12x - 4y + 4 = 0$

6. Quelle est l'équation du cercle dont le centre est (-4, 5) et l'aire de 64π unités carrées ?

7. Quelle est l'équation de la tangente au cercle d'équation $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 5$ et passant par le point de tangence (2, -1) ?

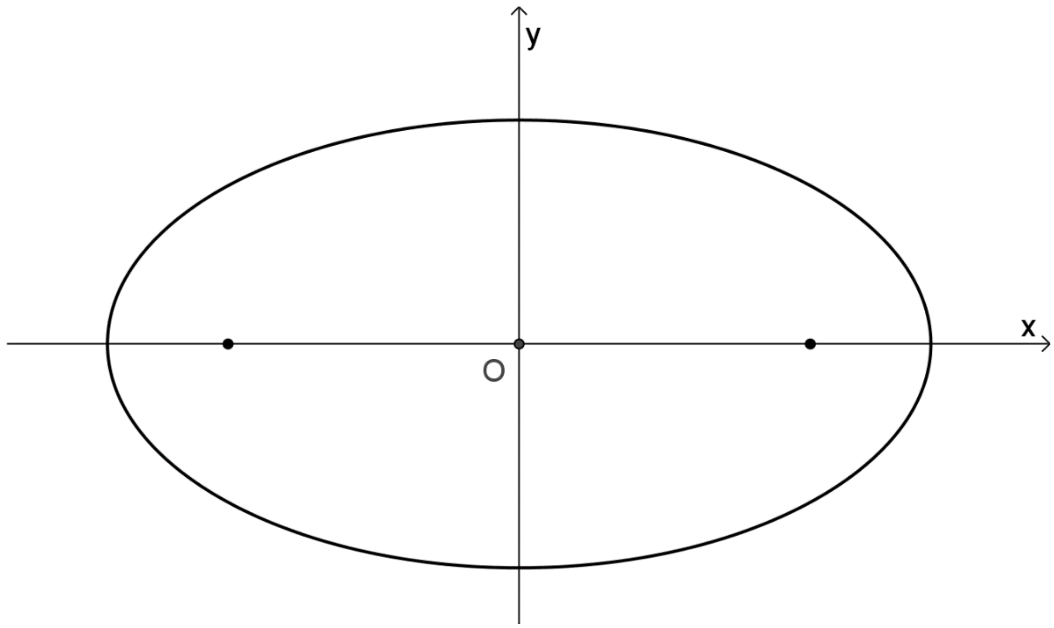
8. Trouver les points d'intersection du cercle défini par $x^2 + y^2 = 25$ et de la droite d'équation $4x + y - 5 = 0$.

9. Trouver les points d'intersection du cercle défini par $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 1$ et de la droite d'équation $y = \frac{2x}{5} - 3$

Calculs…

L'ELLIPSE

Définition *arithmétique* : ____



Vocabulaire et propriétés

F' et F sont les __________________.

O est le __________________ de l'ellipse.

$m\overline{F'F}$ =___________ unités.

A'A est l'axe _________________________ ou l'axe ________________de l'ellipse. Il est également appelé *grand axe* de l'ellipse.

$m\overline{A'A}$=____________ unités

B'B est l'axe _________________________ de l'ellipse. Il est également appelé *petit axe* de l'ellipse.

$m\overline{B'B}$=____________ unités.

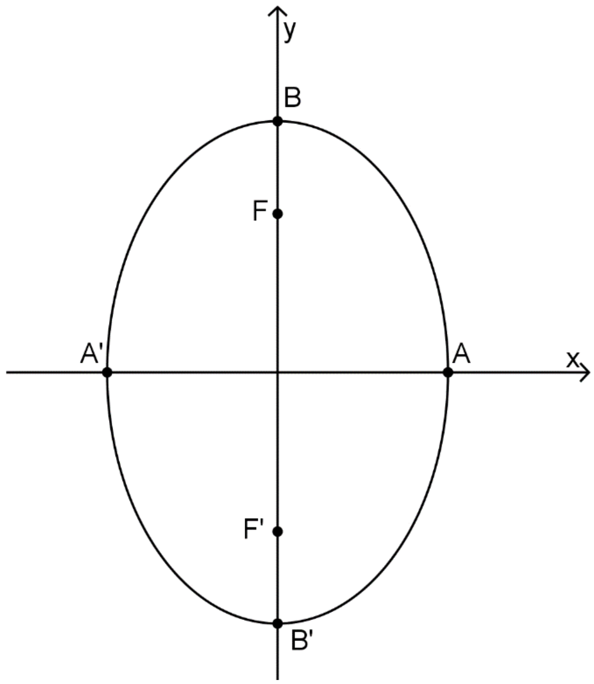
A', A, B', et B sont les _______________________ de l'ellipse.

La distance entre le centre et un foyer de l'ellipse se nomme _______________________.

Note : Comme la distance focale est une *distance*, elle sera toujours ________________!

Dans le cas d'une ellipse d'axe focal horizontal, *a* ___ *b*.

L'ellipse peut également être présentée avec son axe transversal à la verticale…



Dans ce cas…

A'A est l'axe ____________________ de l'ellipse.

B'B est l'axe ___________________________ de l'ellipse.

Dans une telle ellipse b ___ a.

Définition de l'ellipse : Lieu d'un point dont la somme des distances à deux points fixes, appelés foyers, est constante.

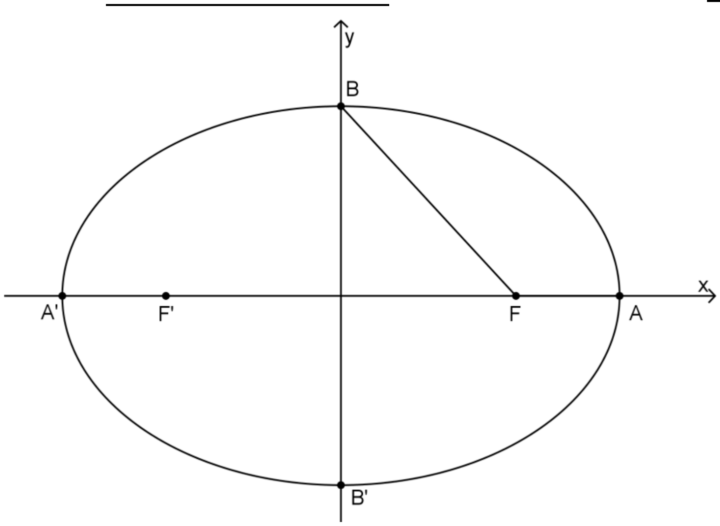
d (P , F') + d (P, F) = constante

d (P , F') + d (P, F) =_________________________________

<u>Relations entre les sommets et les foyers de l'ellipse</u>

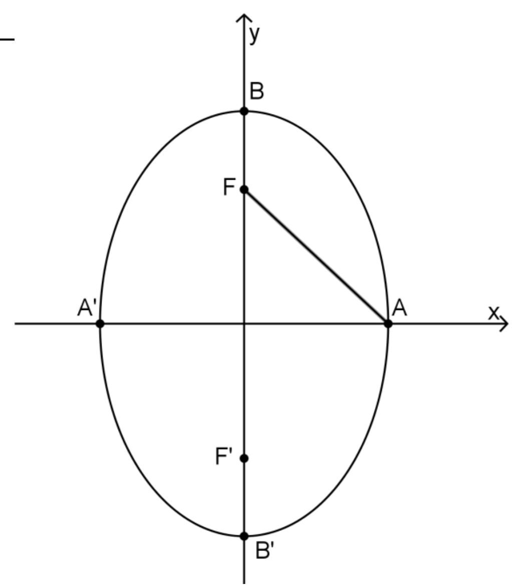
Si $a > b$ alors la position des foyers $(-c, 0)$ et $(c, 0)$ est donnée par la formule

____



Si $a < b$ alors la position des foyers $(0 , c)$ et $(0 , -c)$ est donnée par la formule

____



Équation de l'ellipse centrée à l'origine

On obtient l'équation de l'ellipse centrée à l'origine à partir de la formule de distance et de la définition de l'ellipse.

$$d(P,F')+d(P,F)=2a \qquad \text{Par définition}$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a \qquad \text{Formules de distance}$$

Le reste n'est que manipulations algébriques…
Ce qui permet d'arriver au résultat suivant qui est la forme canonique de l'ellipse :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

où a est la demi-mesure de l'axe horizontal
b est la demi-mesure de l'axe vertical

Note : La démonstration complète est présentée à la page 79.

Exercice 1 : Quelle est l'équation de chacune des ellipses décrite ci-dessous ? (elles sont toutes centrées à l'origine)

a)Axe transversal vertical de 8 unités et axe conjugué de 6 unités

b) La distance focale est de 6 unités et une des extrémités de l'axe focal est le point (8,0).

c) F(0,4) et A'(-2,0)

___________________ ___________________ ___________________

Exercice 2 : Donner la position des sommets et des foyers des ellipses suivantes.

a) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

b) $16x^2 + 4y^2 - 64 = 0$

c) $16x^2 + 25y^2 - 400 = 0$

d) $\frac{x^2}{36} = 1 - \frac{4y^2}{25}$

Ainsi, l'équation générale d'une ellipse centrée à l'origine est :

$$Ax^2 + Cy^2 + F = 0$$

avec ____________________ET______________________

Exercice 3 : Quelles sont les caractéristiques des ellipses dont les équations sont données.

Ellipses	Coordonnées des sommets	Coordonnées des foyers	Mesure du grand axe
a) $\frac{x^2}{225}+\frac{y^2}{81}=1$			
b) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$			
c) $13x^2+49y^2=637$			

Exercice 4 : L'équation d'une ellipse est $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{18}=1$.

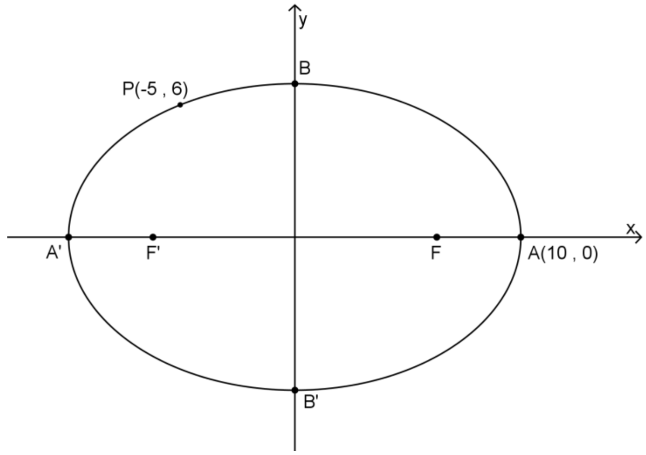
a) Quelles sont les coordonnées de son centre ?

b) Quelles sont les mesures du grand et du petit axe ?

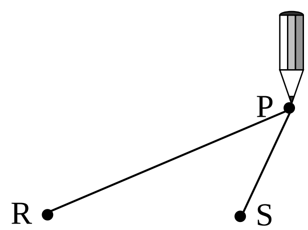
c) Quelles sont les coordonnées des foyers de cette ellipse ?

d) Si le point P (1, y) appartient à cette ellipse, quelle est la valeur de y ?

Exercice 5 : Quelles sont les coordonnées des foyers F’ et F de l’ellipse suivante ?



Exercice 6 : Émilie s’apprête à tracer une ellipse sur une grande feuille à l’aide d’une ficelle de 40cm. Elle fixe les extrémités de la ficelle aux points R et S distants de 24 cm. Avec son crayon au point P, elle tend ensuite la ficelle et trace l’ellipse. Déterminer la mesure du grand axe et celle du petit axe.



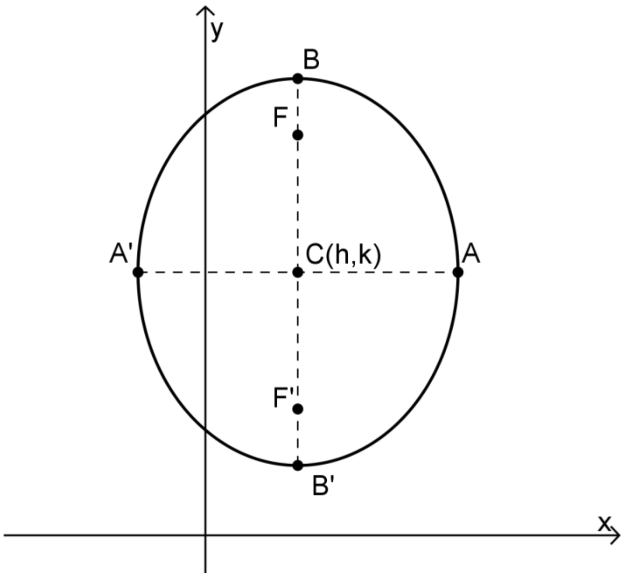
<u>Exercice 7</u> : Lors de son voyage à Rome, François a visité le Colisée avec un groupe de touristes. Le guide qui les accompagnait leur a expliqué que ce monument avait la forme d'une ellipse longue de 187 m et large de 155 m. François a remarqué qu'il y avait deux entrées principales aux extrémités du grand axe.

a) Alors qu'il se trouvait à l'une des entrées, quelle distance séparait François du plus proche foyer de l'ellipse ?

b) Après avoir estimé la position du foyer, François s'y est rendu. Quelle est, au mètre près, la largeur du Colisée à cet endroit ?

<u>Exercice 8:</u> Donner une règle possible pour une ellipse d'axe focal vertical passant par le point $P\left(2\ ,\ \dfrac{-8\sqrt{5}}{3}\right)$ et dont la distance entre le sommet A' et un foyer est de 8 unités

Ellipses centrées en (h , k) (non élément du programme *Sciences Naturelles 5*)
Donner en fonction de a, b, c, h et k les coordonnées des sommets et des foyers de l'ellipse représentée ci-dessous.



Les coordonnées :

A'(__________ , ___________)

A(___________ , ___________)

B'(__________ , ___________)

B(___________ , ___________)

F'(__________ , ___________)

F(___________ , ___________)

L'équation <u>canonique</u> de l'ellipse centrée en (h , k) est :

<u>Exercice 1</u> : Soit l'équation de l'ellipse $\frac{(x+5)^2}{64}+\frac{(y-2)^2}{100}=1$

a) Quelles sont les coordonnées du centre C de cette ellipse?
b) Quelles sont les mesures respectives du grand et du petit axe?
c) Construire un croquis de cette ellipse
d) Quelle serait l'équation de cette ellipse sous forme générale?

L'équation canonique de l'ellipse peut se ramener à la forme générale :

$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ avec__________ ET _________________

Exercice 2 : Trouver les coordonnées du centre, des sommets et des foyers de l'ellipse d'équation : $x^2 + 4y^2 - 10x + 16y = -37$

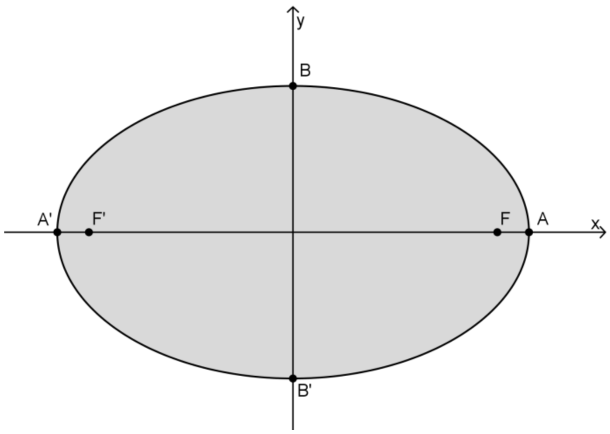
Exercice 3 : Un archéologue a quadrillé un terrain pour une recherche sur le site de Ellipscité de la Conique Antique dont les fortifications forment une ellipse. Un des foyers de cette ellipse se trouve au point F_1 (1 , -4). Au centre de la cité, un lac circulaire a été repéré. Par analyse des données recueillies par un sondage échographique, l'ordinateur nous livre l'équation du périmètre de ce lac : $x^2 + y^2 - 12x + 8y + 51 = 0$. Le petit axe de l'ellipse mesure 6 km.

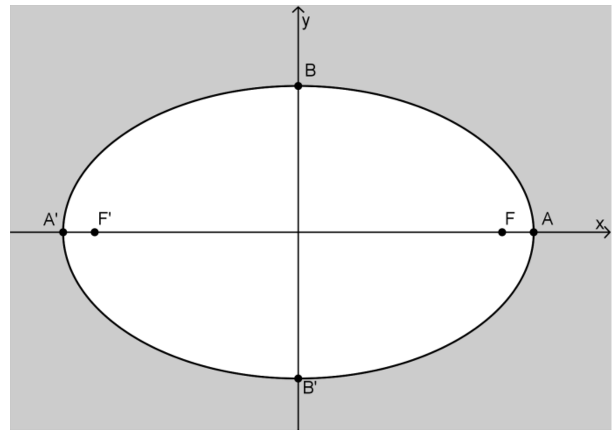
a) Donne l'équation décrivant cette ellipse

b) Donner l'aire de cette cité

c) Un canal linéaire avait été creusé à travers la cité. L'ordinateur de repérage donne l'équation $x + 2y + 2 = 0$. Trouver les coordonnées des points de rencontre du canal avec la muraille.

Régions associées à l'ellipse





$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \quad\quad 1$$

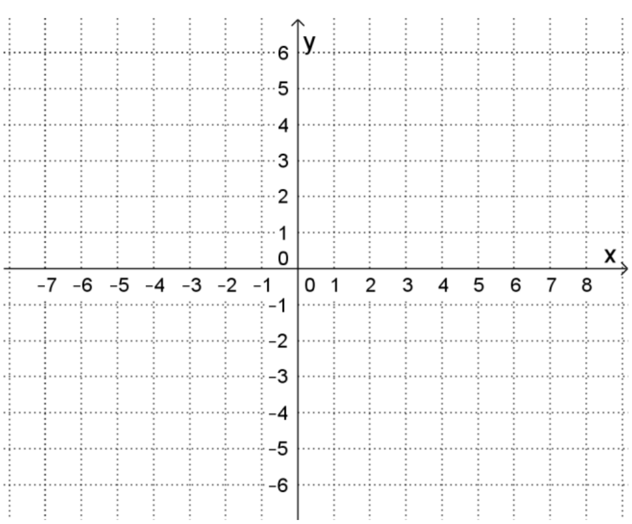
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \quad\quad 1$$

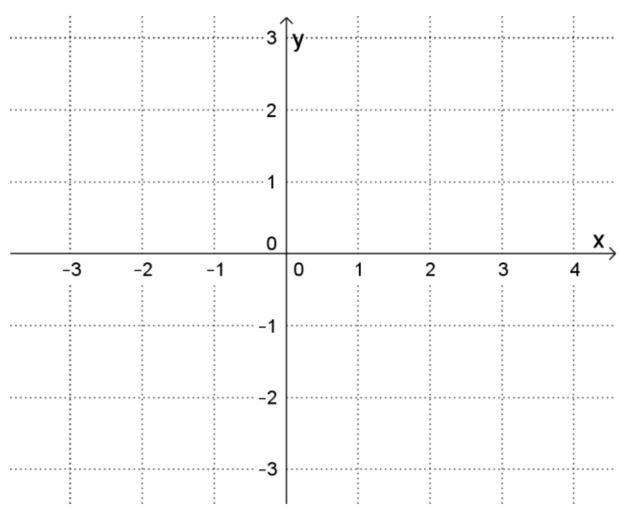
Note
si l'inégalité est < ou > alors on trace l'ellipse________________________________,

Exercice 1 : Représenter graphiquement (en indiquant clairement les coordonnées des sommets de l'ellipse frontière) la région du plan associée aux inéquations suivantes :

a) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}\geq 1$

b) $\frac{x^2}{4}+y^2<1$



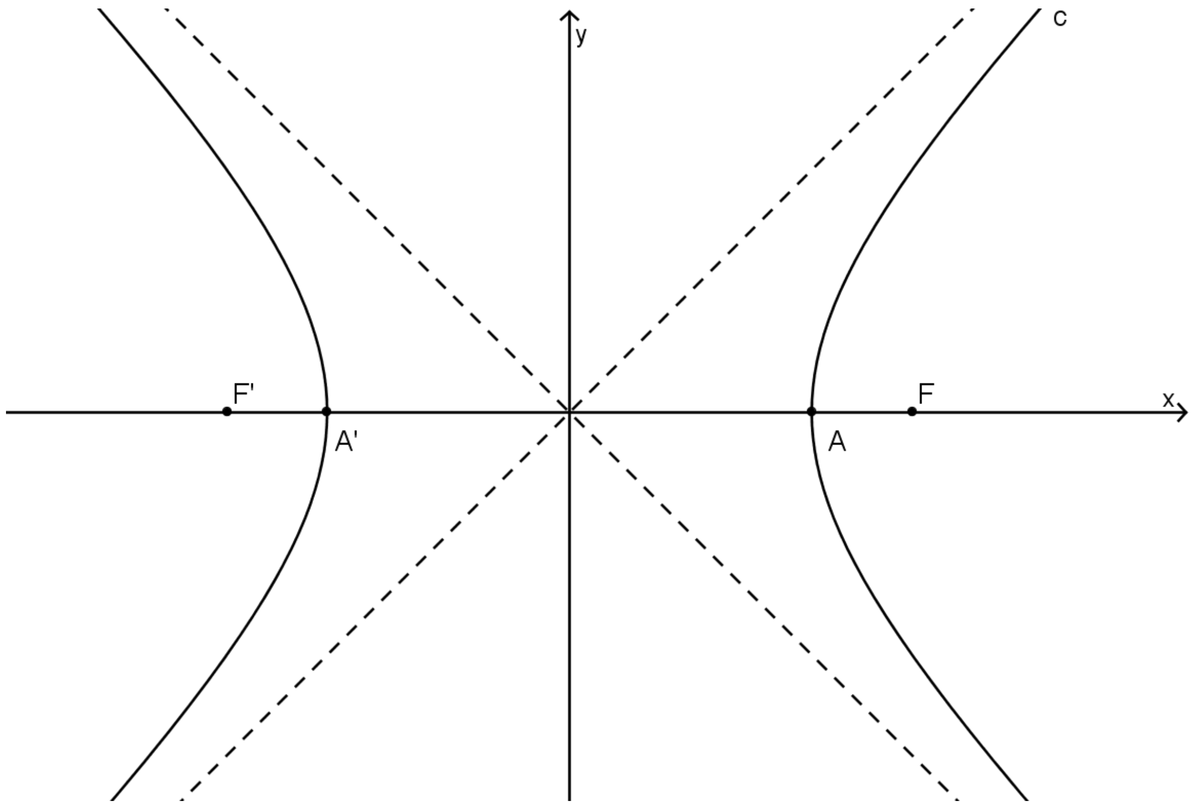


Exercice 2 : Détermine l'inéquation associée à la région extérieure (seulement) de l'ellipse dont les foyers ont pour coordonnées $\left(\pm\sqrt{10}\,,0\right)$ et dont un des sommets coïncide avec le centre du cercle d'équation : $x^2 + y^2 - 8y + 11 = 0$.

Détermine l'abscisse du point P de cette ellipse ayant 1 pour ordonnée.

L'HYPERBOLE

Définition arithmétique :____



Vocabulaire

O est le __________________ de l'hyperbole.

F et F' sont les __________________ de l'hyperbole.

$m\overline{F'O} = m\overline{OF}$ =___________ . Cette longueur s'appelle la __________________________.

A' et A sont les _________________ de l'hyperbole.

La distance entre ces sommets est ______________ unités.

L'axe supportant les foyers est l'axe __________________________ ou l'axe___________.

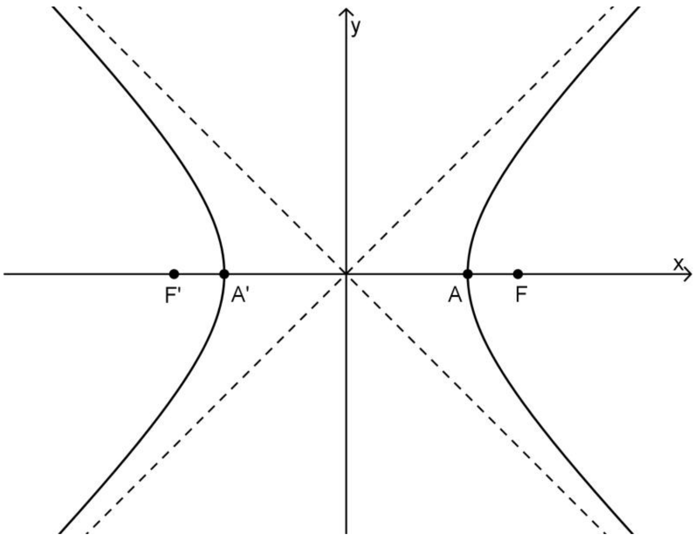
Les asymptotes ont pour équations :____________________

Définition : Lieu d'un point dont **la valeur absolue de la différence** des distances à deux points fixes, appelés foyers, est constante.

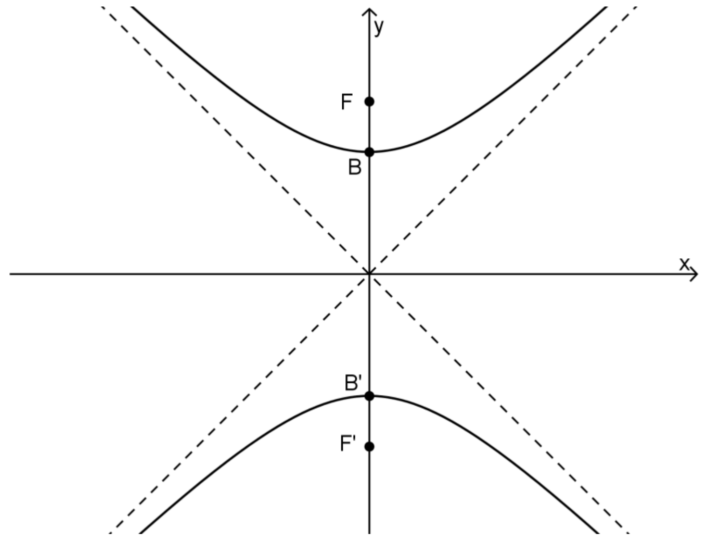
$$\left| d\,(P\,,F') - d\,(P,F) \right| = \textbf{constante}$$

$$\left| d\,(P\,,F') - d\,(P,F) \right| = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

L'hyperbole peut se présenter sous deux formes :



Axe focal horizontal



Axe focal vertical

L'équation canonique est :	L'équation canonique est :

La position des foyers est déterminée de la manière suivante :________________ **et ce, peu importe la position de l'hyperbole!**

Exercice 1 : Détermine l'équation des hyperboles centrées à l'origine suivantes sachant

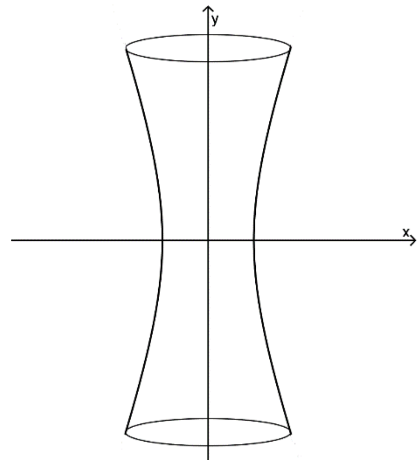
a) A' (-4 , 0) et F (5 , 0)

b) Sommets $(0\ ,\ \pm 6)$ et équations des asymptotes : $y = \pm 2x$

Exercice 2 : Quelles sont les caractéristiques des hyperboles dont les équations sont données ?

	Coordonnées des sommets	Coordonnées des foyers	Équations des asymptotes
a) $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$	_________ _________	_________ _________	_________ _________
b) $\frac{x^2}{24} - \frac{y^2}{25} = 1$	_________ _________	_________ _________	_________ _________
c) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = -1$	_________ _________	_________ _________	_________ _________
d) $\frac{4x^2}{9} - \frac{25y^2}{16} = 1$	_________ _________	_________ _________	_________ _________
e) $x^2 - y^2 + 10 = 0$	_________ _________	_________ _________	_________ _________

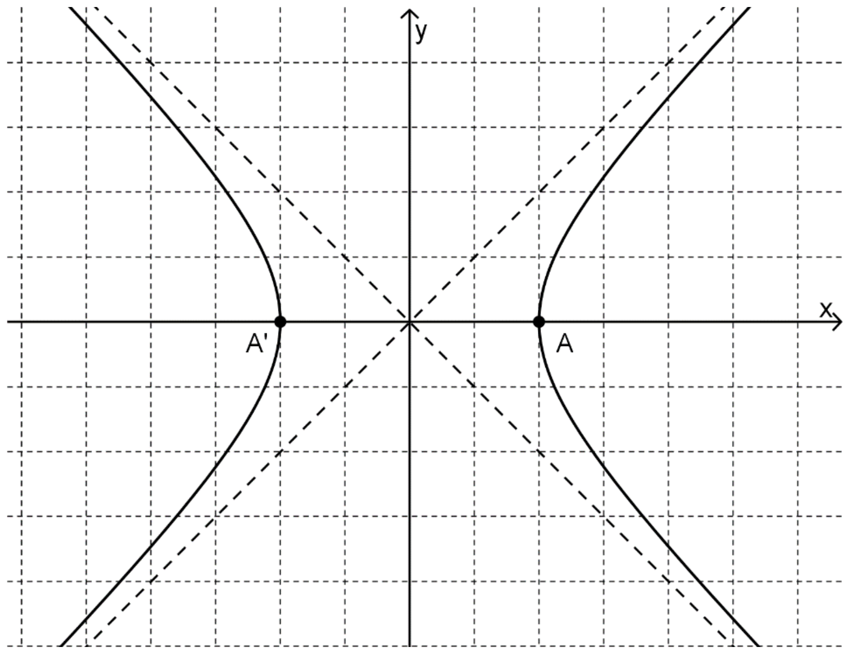
<u>Exercice 3</u> : Une designer a utilisé une hyperbole d'équation $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{200}=1$ pour créer un vase dont voici une représentation. Sachant que le diamètre de la base et le diamètre de l'ouverture sont de 12 cm chacun, déterminer au dixième la hauteur du vase.



<u>Exercice 4</u> : Quelles sont les équations des asymptotes d'une hyperbole d'axe focal horizontal sachant que la distance qui sépare ses sommets est de 4 unités et qu'elle passe par le point $P\left(4\,,-2\sqrt{3}\right)$?

Hyperboles équilatères

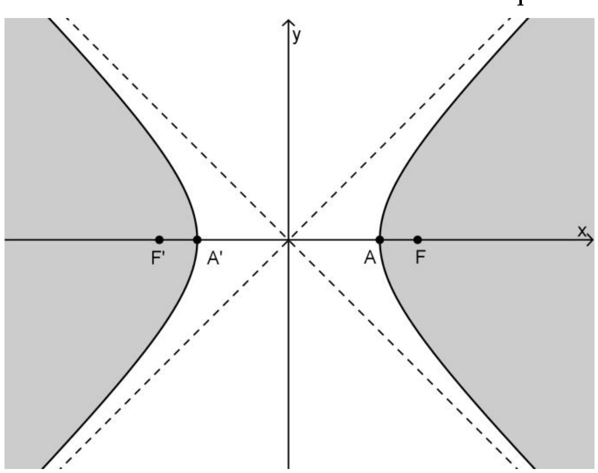
Que pouvons-nous affirmer au sujet d'une hyperbole dont les asymptotes se croisent à angle droit (dans un plan où les axes ont le même pas de graduation)?_______________



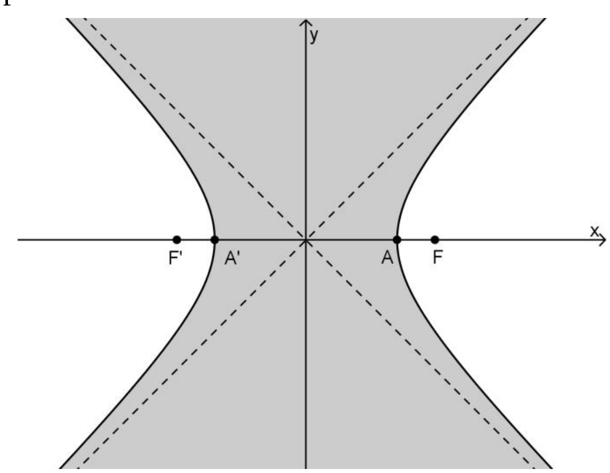
Une telle hyperbole est dite _________________________.

Les régions associées à l'hyperbole

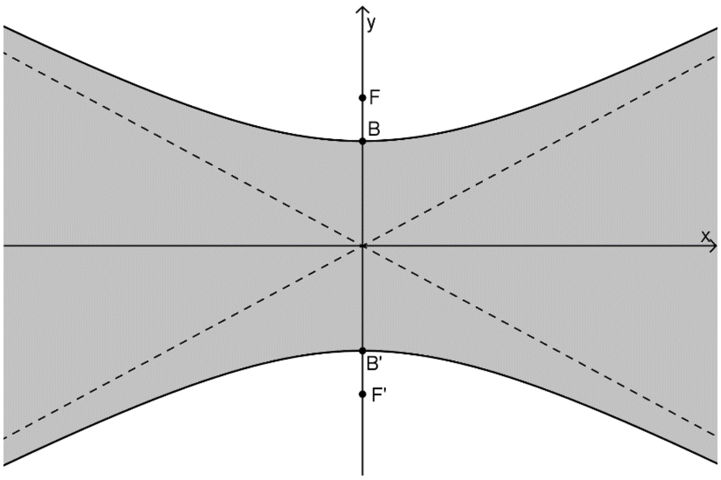
Faites attention, car l'hyperbole est une figure ouverte. Les notions *d'intérieur* et *d'extérieur* sont moins évidentes que celles vues précédemment.

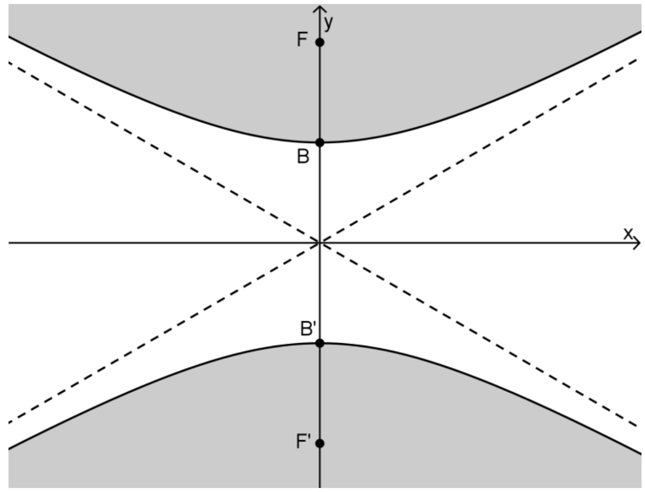


$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2} \qquad 1$$



$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2} \qquad 1$$





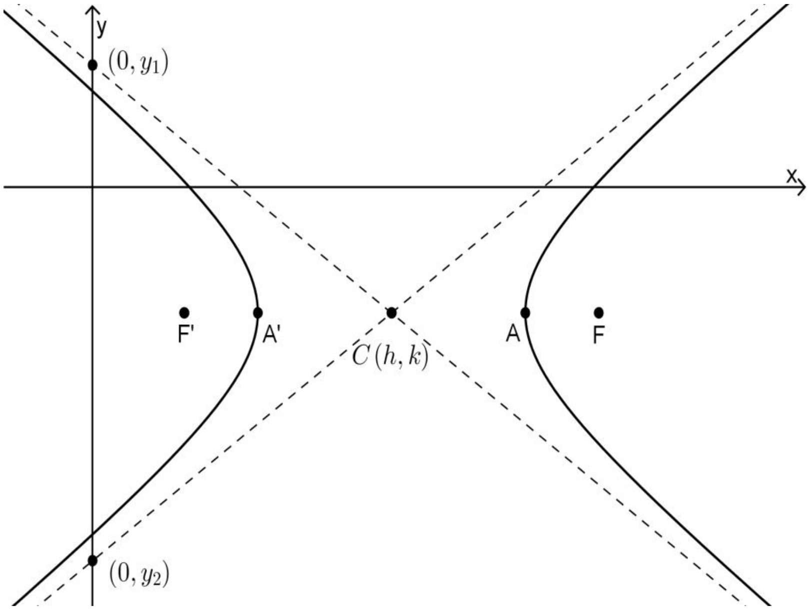
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2} \qquad -1$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2} \qquad -1$$

<u>Note</u> : On appelle INTÉRIEUR, la région qui contient ____________________________

et EXTÉRIEUR, la région qui contient ______________________ de l'hyperbole.

Hyperboles centrées en (h , k) (non élément du programme *Sciences Naturelles 5*)



Caractéristiques :

1. Équation canonique :
$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$
ou
$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=-1$$
2. Équation des asymptotes :
$$y=-\frac{b}{a}x+y_1 \quad \text{et} \quad y=\frac{b}{a}x+y_2$$
3. Positions des sommets et des foyers
A'(__________ , ___________)
A(__________ , ___________)
F'(__________ , ___________)
F(,   )

Exercice 1 : Détermine l'équation du cercle tangent aux sommets de l'hyperbole dont l'équation est :

$$9x^2+36x-5y^2+30y-54=0$$

L'équation canonique de l'hyperbole peut se ramener à la forme générale :

Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0   avec_______________

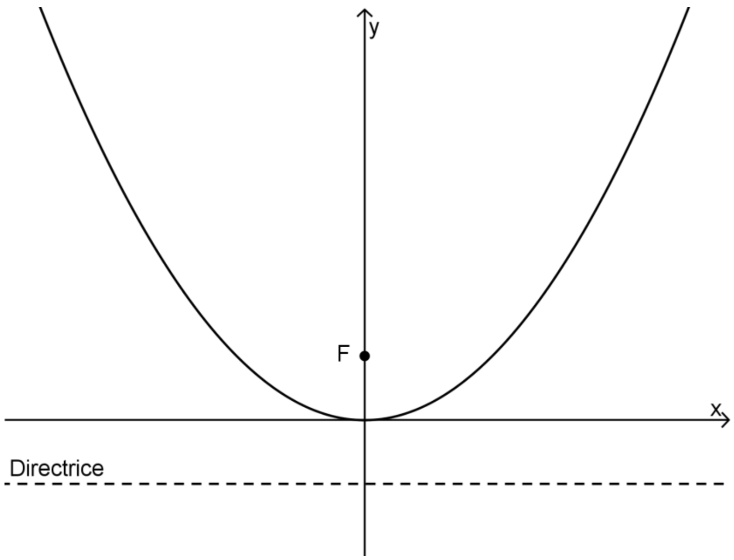
Pour les AS!!!

Nous savons que si les asymptotes d'une hyperbole sont perpendiculaires, l'hyperbole est dite équilatère. La courbe de la fonction rationnelle est donc une hyperbole équilatère et peut donc être traitée comme un lieu géométrique (axe focal etc.).

Détermine la position exacte des foyers de l'hyperbole $f(x)=\dfrac{4}{x-1}+3$ sachant que la distance minimale entre les branches de cette fonction est de $4\sqrt{2}$ unités.

<u>LA PARABOLE</u>

*Définition géométrique :*____



<u>Règle canonique</u> de la parabole concave vers le haut et ayant son sommet à l'origine :

<u>Vocabulaire</u>

F est le ________________________ de la parabole

S (ici l'origine du plan) est le ________________________ de la parabole

d est la ________________________ de la parabole

Axe de la parabole : Droite perpendiculaire à la directrice passant par le foyer.
Il est aussi appelé *axe focal* ou *axe de symétrie.*

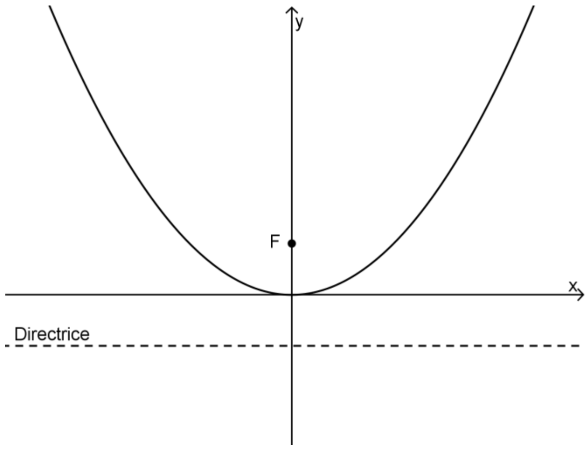
Sommet : point d'intersection de la parabole et de l'axe.

La *distance focale* est la distance entre ______________________ et le ______________
et/ou entre le ___________________ et ____

Observation : Plus la distance focale est grande, plus la parabole est ________________

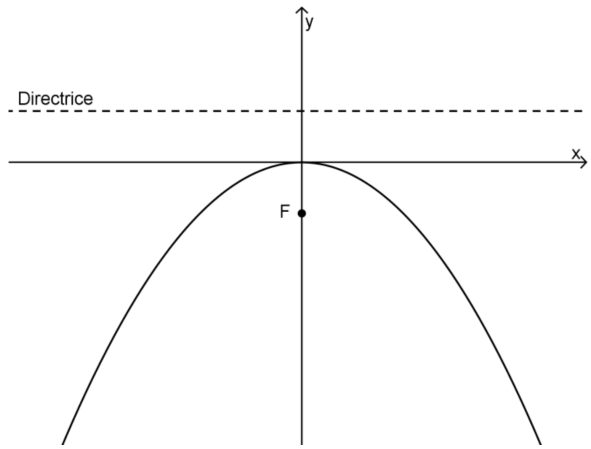
Définition : La parabole est le lieu d'un point à égale distance d'un point fixe, appelé foyer, et d'une droite fixe, appelée directrice.

La parabole peut se présenter sous 4 formes :



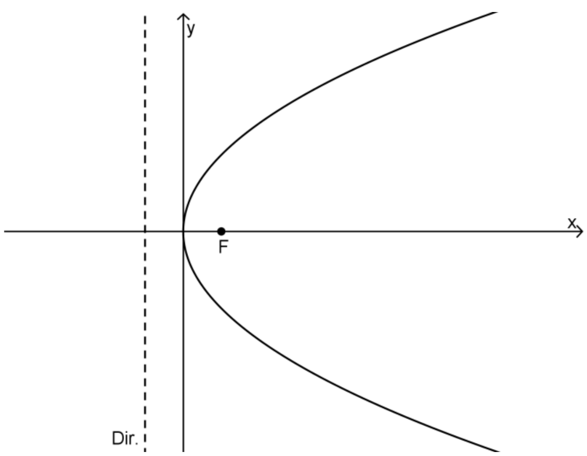
L'équation canonique est :

Et ayant son sommet en (h , k)



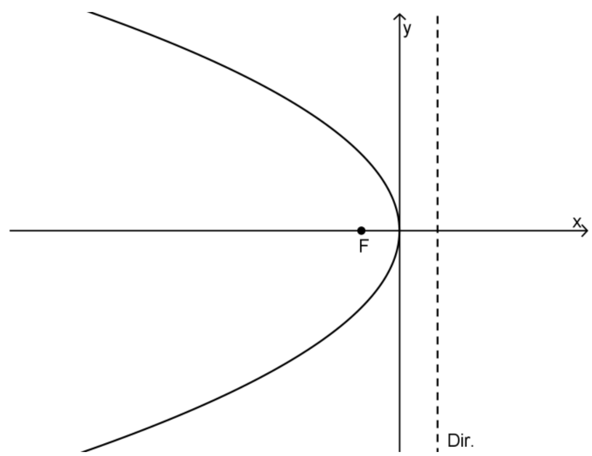
L'équation canonique est :

Et ayant son sommet en (h , k)



L'équation canonique est :

Et ayant son sommet en (h , k)



L'équation canonique est :

Et ayant son sommet en (h , k)

<u>Exercice 1</u> : Quelles sont les caractéristiques des paraboles dont les équations sont données ?

	Équation de l'axe de symétrie	Coordonnées du foyer	Équation de la directrice
a) $y^2 = -16x$	___________	___________	___________
b) $x^2 = 8y$	___________	___________	___________
c) $y^2 = 2x$	___________	___________	___________
d) $x^2 = -2{,}4y$	___________	___________	___________

<u>Exercice 2</u> : Déterminer l'équation des paraboles décrites. Chaque parabole a son sommet à l'origine.

a) Les coordonnées du foyer sont (-2, 0).

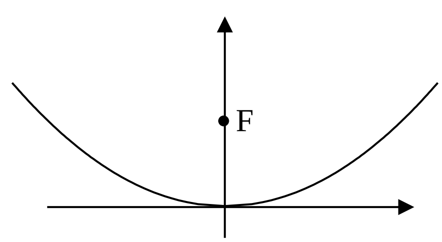
b) L'équation de la directrice est $x = 5$.

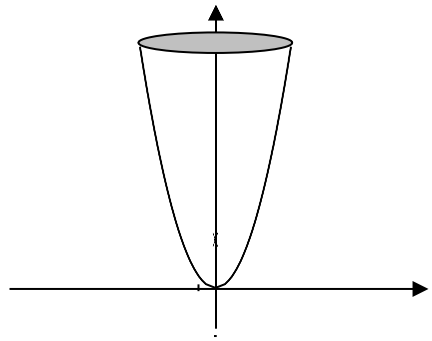
c) L'axe de symétrie et la directrice se croisent au point (0, 3).

d) L'axe de symétrie est x = 0 et la directrice passe par le point (3, 4).

e) La parabole passe par le point R(4, 5) et possède un axe focal à $y = 0$.

<u>Exercice 3</u> : Déterminer les coordonnées du foyer de cette parabole qui passe par le point P(-6, 2) et dont le sommet est à l'origine.





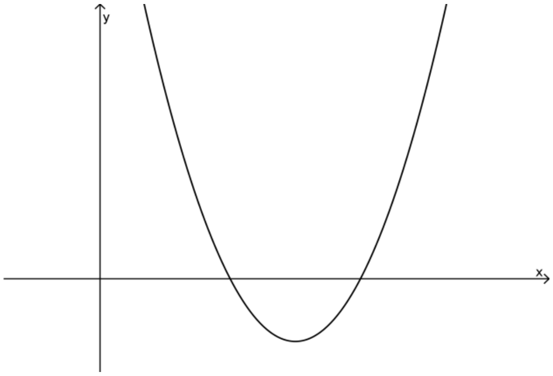
Exercice 4 : La partie supérieure de cette coupe dessinée dans le plan cartésien a la forme d'une parabole dont l'équation est $x^2 = \frac{4}{3}y$ (l'unité étant le centimètre). La profondeur de la coupe est égale à 36 fois la distance entre le foyer et le sommet de la parabole.

Quelle est la largeur de la coupe ?

Exercice 5 : Trouver l'équation de l'hyperbole sachant que ses foyers coïncident avec les sommets de l'ellipse et ses sommets avec les foyers de l'ellipse.
L'ellipse est définie par l'équation : $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

Exercice 6 : Trouver l'équation de l'ellipse dont les sommets coïncident avec les foyers de l'hyperbole et ses foyers avec les sommets.
L'hyperbole est définie par l'équation : $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{16} = 1$.

Paraboles translatées



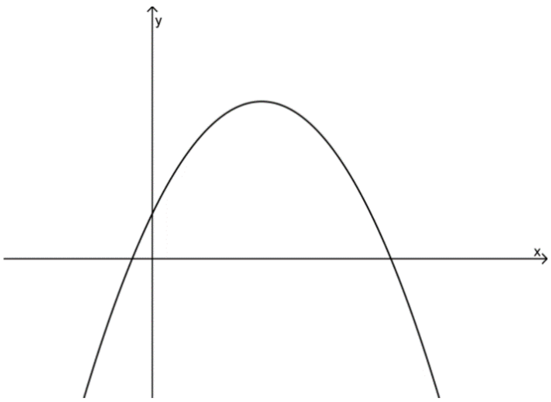
Modèle : $(x-h)^2 = 4c(y-k)$

Coordonnées du sommet S : ____________

Coordonnées du foyer F :_______________

Équation de l'axe focal : _______________

Équation de la directrice *d* :_____________



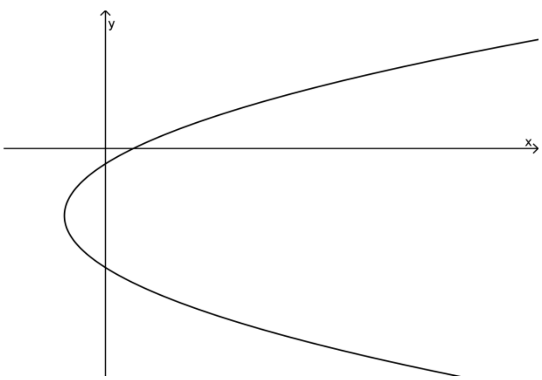
Modèle : $(x-h)^2 = -4c(y-k)$

Coordonnées du sommet S : ____________

Coordonnées du foyer F :_______________

Équation de l'axe focal : _______________

Équation de la directrice *d* :_____________



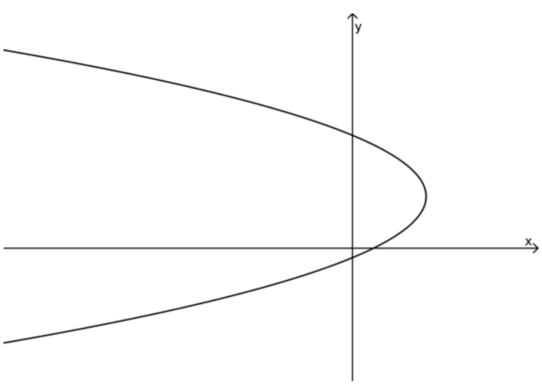
Modèle : $(y-k)^2 = 4c(x-h)$

Coordonnées du sommet S : ____________

Coordonnées du foyer F :_______________

Équation de l'axe focal : _______________

Équation de la directrice *d* :_____________



Modèle : $(y-k)^2 = -4c(x-h)$

Coordonnées du sommet S : ____________

Coordonnées du foyer F :_______________

Équation de l'axe focal : _______________

Équation de la directrice *d* :_____________

Exercice 1 :

Soit la parabole d'équation $(x + 1)^2 = -8(y - 2)$

a) Tracer un croquis et déterminer le sens de sa concavité.
b) Que vaut la distance focale?
c) Quelles sont les coordonnées du foyer et du sommet?
d) Quelles sont les équations de la directrice et de l'axe de la parabole?
e) Est-ce que le point M (5, -5/2) appartient à la parabole?

Exercice 2 :

Quelle est l'équation de la parabole sachant qu'elle est concave vers la gauche, a son sommet en (3, 1) et une distance focale de 4 unités?

Exercice 3 :

Quelle est l'équation de la parabole sachant que son foyer est au point (4, 13) et l'équation de la directrice est $y = -3$?

Résumé de la forme générale des 5 lieux que nous connaissons

Soit un lieu représenté par une équation de la forme: $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

Il s'agit d'un cercle si : ______________________________

Il s'agit d'une ellipse si : ____________________________

Il s'agit d'une hyperbole si : _________________________

Il s'agit d'une parabole si : __________________________

Il s'agit d'une droite si : _____________________________

Calculs…

Exercice 4 :

Quelle est la plus courte distance entre C (comète) et E (étoile située au foyer) sachant que C suit la trajectoire décrite par le lieu suivant : $y^2 - 8y - 48x + 400 = 0$?

<u>Régions associées à la parabole</u>

On appelle L'INTÉRIEUR d'une parabole la région qui contient le foyer.

$$\begin{cases} x^2 < 4cy \\ x^2 < -4cy \\ y^2 < 4cx \\ y^2 < -4cx \end{cases}$$

D'un point de vue algébrique, ces inéquations représentent la région dans laquelle nous serions susceptibles de retrouver un point P tel que : d(*P, F*) < d(P, *directrice)*.

On appelle L'EXTÉRIEUR d'une parabole la région qui contient la directrice.

$$\begin{cases} x^2 > 4cy \\ x^2 > -4cy \\ y^2 > 4cx \\ y^2 > -4cx \end{cases}$$

D'un point de vue algébrique, ces inéquations représentent la région dans laquelle nous serions susceptibles de retrouver un point P tel que : d(*P, F*) > d(*P, directrice*).

<u>Exercice</u> :

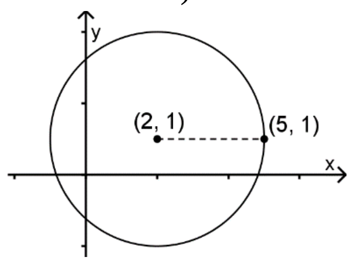
Déterminer l'inéquation associée à la région contenant le point R (0,5) sachant que la courbe frontière est une parabole de directrice $y = -3$ et dont le foyer est situé en (4,0)

LIEUX GÉOMÉTRIQUES ET CONIQUES – EXERCICES

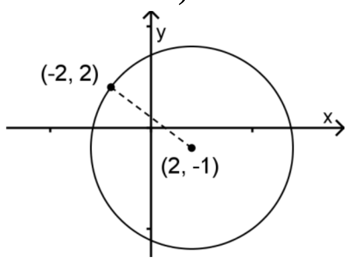
Le cercle

Exercice 1:
Trouver l'équation de chacun des cercles suivants.

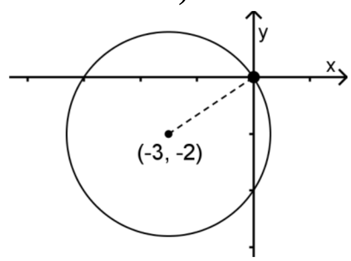
a)



b)



c)



Exercice 2:
Connaissant les coordonnées du centre C et d'un point P du cercle, déterminer l'équation de ce cercle, d'abord sous forme canonique, puis sous la forme générale.

a) C(-2, 5) et P(4, 2) b) C(1, -3) et P(-1, -5) c) C(0, -8) et P(6, 0)

Exercice 3:
Déterminer les coordonnées du centre et la mesure du rayon du cercle d'équation :

a) $(x-6)^2+(y+2)^2=49$ b) $(x+5)^2+(y-4)^2=12$ c) $x^2+y^2=20$
d) $(x+1)^2+(y+3)^2=35$ e) $(x-4)^2+y^2=64$ f) $(x-2)^2+(y-4)^2=75$

Exercice 4:
Soit le cercle d'équation $(x-5)^2+(y+2)^2=16$. Trouver les coordonnées des points situés aux extrémités du diamètre parallèle à l'axe des abscisses.

Exercice 5:
Trouver l'équation du cercle dont les extrémités de l'un des diamètres sont les points de coordonnées :

a) (-2, 7) et (10, -9) b) (-3, 6) et (1, 0)

Calculs…

Exercice 6:

Soit le cercle d'équation $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 5$. Donner les coordonnées des points de rencontre de ce cercle avec l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.

Exercice 7:

Un cercle de centre (5, 8) est tangent à la droite d'équation $x + 3y - 9 = 0$. Trouver l'équation de ce cercle.

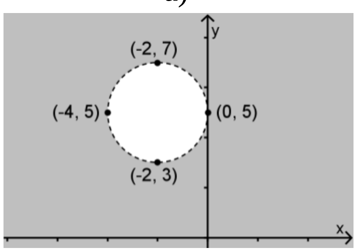
Exercice 8:

Une droite d'équation $x - y - 3 = 0$ rencontre le cercle d'équation $(x - 6)^2 + (y - 2)^2 = 25$ en deux points. Trouver les coordonnées de ces points.

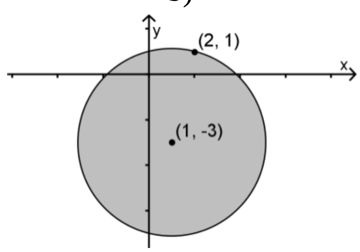
Exercice 9:

Déterminer l'inéquation associée à la région représentée en gris.

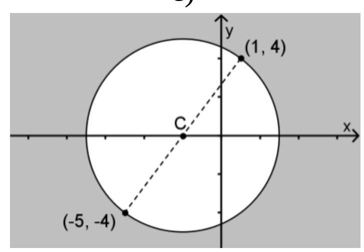
a)



b)



c)



Exercice 10:

Soit le cercle d'équation $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 9$. Donner la position de chacun des points donnés : sur le cercle, à l'intérieur ou à l'extérieur.

a) (4, -4) b) (1, 1) c) (6, -2)

d) (3, -2) e) (3, -5) f) (5, 1)

Exercice 11:

Un segment de 6 unités de longueur a une extrémité située à l'origine du plan cartésien. Ce segment tourne autour du point (0, 0). Trouver la relation qui décrit la région balayée par ce segment.

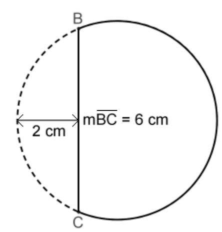
Calculs…

<u>Exercice 12</u>:
Un parc sera aménagé dans un nouveau quartier d'une ville. La plupart des personnes qui fréquenteront ce parc habitent dans un rayon de 4 km. Trouver la relation qui représente cette région sachant que le parc se situe au point (7, -5) de la carte de cette municipalité.

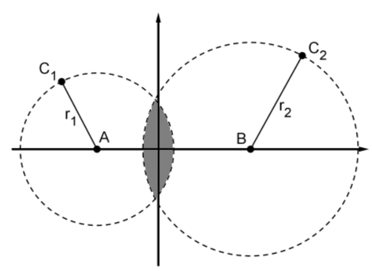
<u>Exercice 13</u>:
L'ensemble des points situés à une distance de 8 unités et plus du point de coordonnées (-5, 0) du plan cartésien vérifient tous la même inéquation. Quelle est-elle?

<u>Exercice 14</u>:
L'entrée d'un tunnel a la forme d'un demi-cercle. À 2 m du bord, la hauteur est de 6 m. Quelle est la hauteur *h* de ce tunnel en son centre ??

<u>Exercice 15</u>:
Dans une usine, un machiniste doit fabriquer des pièces ayant la forme illustrée. À partir d'un disque, il doit enlever une section (BC) de 6 cm de longueur et de 2 cm d'épaisseur. Quel est le rayon de ce cercle?



<u>Exercice 16</u>:
Une lentille convergente est illustrée par deux surfaces sphériques. Le dessin ci-contre représente une vue en coupe de cette lentille. Le rayon de courbure de la face droite de la lentille est r_1 et celui de la face gauche est r_2. L'épaisseur maximale de la lentille est de une unité. L'équation du cercle C_1 est $(x + 2)^2 + y^2 = 6{,}25$. La distance entre les centres des deux cercles de 5 unités. Trouver l'équation du cercle C_2.



<u>Exercice 17</u>:
Dans le premier quadrant du plan cartésien, un cercle et sa région extérieure sont représentés. Le cercle, dont le rayon mesure 10 unités est situé à une distance de 5 unités de l'axe des abscisses et de 8 unités de l'axe des ordonnées. Trouver les inéquations associées à cette région.

Calculs…

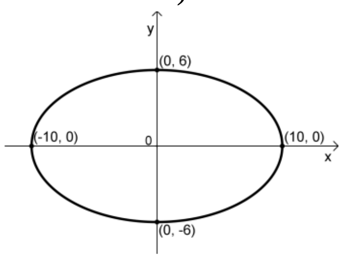
L'ellipse

Exercice 1:

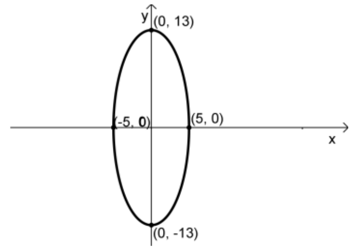
Pour chacune de ces ellipses, détermine :

1) la mesure du grand axe;
2) la mesure du petit axe;
3) les coordonnées des foyers.

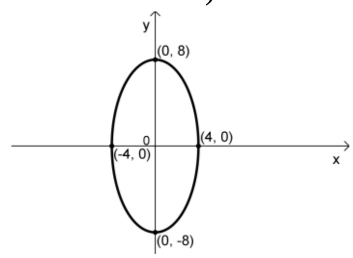
a)



b)



c)



Exercice 2:

Les coordonnées de deux sommets et des foyers d'une ellipse centrée à l'origine étant connues, trouver les coordonnées des deux autres sommets.

a) Sommets : (0, 8) et (0, -8)
Foyers : (0, 4) et (0, -4)

b) Sommets : (-12, 0) et (12, 0)
Foyers : (-8, 0) et (8, 0)

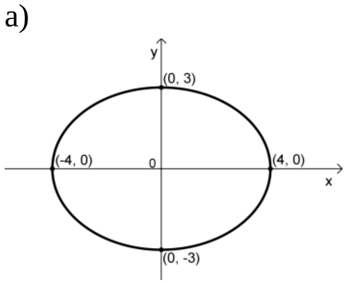
Exercice 3:

3. Les coordonnées des foyers d'une ellipse sont (-5, 0) et (5, 0), et la mesure du grand axe est de 14 unités. Déterminer les coordonnées du centre de cette ellipse et la mesure de son petit axe.

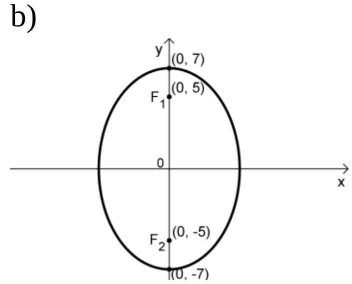
Exercice 4:

Trouver l'équation des ellipses suivantes.

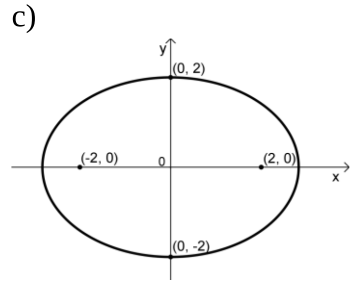
a)



b)



c)



Calculs…

Exercice 5:
Le grand axe d'une ellipse centrée à l'origine mesure 6 unités, et 2 unités séparent les foyers de cette ellipse. Sachant que le grand axe est situé sur l'axe des ordonnées, trouver l'équation de cette ellipse.

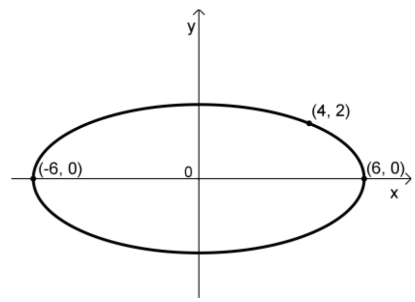
Exercice 6:
Trouver les coordonnées des foyers de chacune des ellipses :

a) $\frac{x^2}{24}+\frac{y^2}{49}=1$ b) $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{40}=1$ c) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$

Exercice 7:
Soit l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$. Déterminer

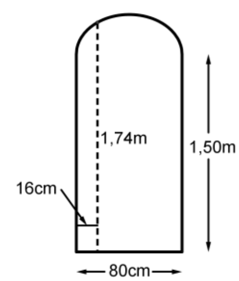
a) Les coordonnées des sommets.
b) La valeur manquante dans les couples suivants : (x ; 3) et (-2,4 ; y).

Exercice 8:
Trouver l'équation de l'ellipse suivante.

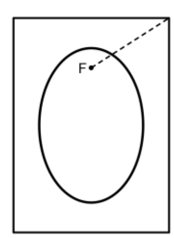


Exercice 9:
Maria prépare une affiche. Elle a dessiné une ellipse dont les axes mesurent respectivement 40cm et 24cm. Elle inscrit, dans cette ellipse, un rectangle dont deux côtés passent par les foyers. Quelles sont les dimensions de ce rectangle ?

Exercice 10:
Chez Olivier, l'ouverture entre la salle à manger et le salon est surmontée d'une demi-ellipse. La largeur de l'ouverture est de 80cm. À 16cm du bord, la hauteur de l'ouverture est de 1,74m. Quelle est la hauteur de cette ouverture en son centre ?



Exercice 11:
Pour encadrer sa photo, Patricia a choisi un modèle comme celui qui est illustré sur la figure ci-contre. Une ellipse de 12cm de large et de 18cm de haut a été découpée dans le rectangle. La distance entre le rectangle et l'ellipse est de 3cm sur les côtés, et de 3,5cm au-dessus et en dessous. À quelle distance du sommet du rectangle se situe un des foyers de l'ellipse ?



Calculs…

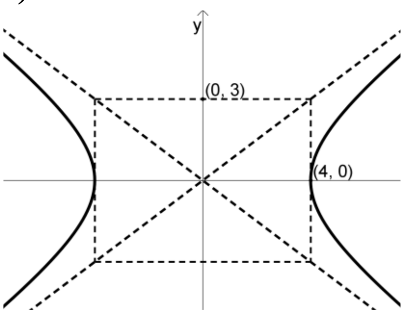
L’hyperbole

Exercice 1:

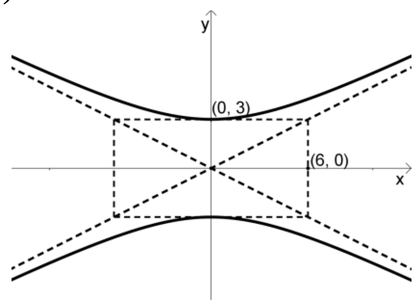
Pour chaque hyperbole, centrée à l’origine, représentée :

1) déterminer les coordonnées des foyers;
2) trouver l’équation des asymptotes.

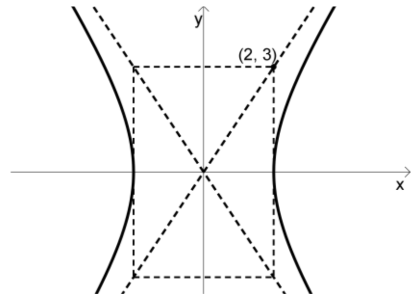
a)



b)



c)



Exercice 2:

Les coordonnées des sommets et des foyers d’une hyperbole étant données, trouver l’équation des asymptotes.

a) S : (0, 5) et (0, -5)
F : (0, 13) et (0, -13)

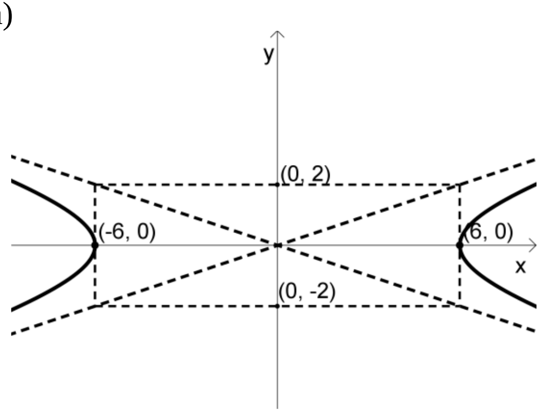
b) S : (5, 0) et (-5, 0)
F : (7, 0) et (-7, 0)

c) S : (0, 3) et (0, -3)
F : (0, 6) et (0, -6)

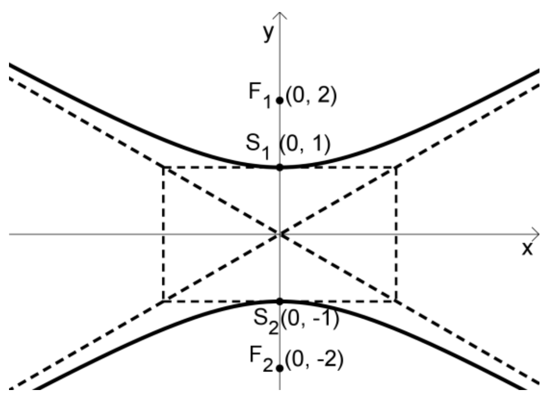
Exercice 3:

Trouver l’équation des hyperboles suivantes.

a)



b)



Exercice 4:

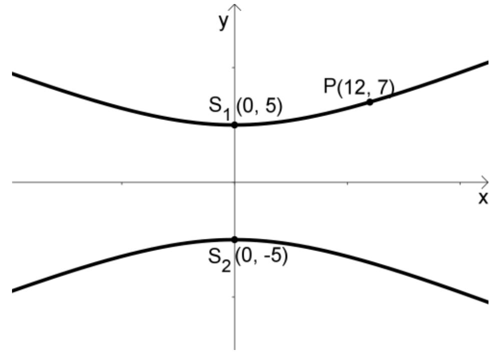
L’équation d’une hyperbole étant donnée, déterminer :

1) les coordonnées des sommets;
2) les coordonnées des foyers;
3) l’équation des asymptotes.

a) $\frac{y^2}{12} - \frac{x^2}{16} = 1$ b) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ c) $\frac{x^2}{32} - \frac{y^2}{9} = -1$

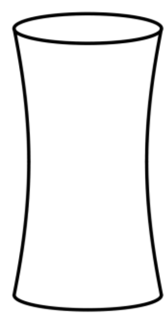
Calculs…

Exercice 5:
Trouver l'équation de l'hyperbole suivante.



Exercice 6:
Les foyers d'une hyperbole ont pour coordonnées $(0\ ,\ \pm 13)$. Sachant que l'hyperbole passe par le point (-28,8 ; 13), déterminer son équation sous forme canonique.

Exercice 7:
Un vase à fleurs a la forme illustrée ci-contre. La courbure des côtés correspond à une hyperbole. Le diamètre du vase, à la base, est de 20cm et au centre, 16cm. La hauteur de ce vase est de 36cm. Quel est son diamètre à une hauteur de 10cm?



Calculs…

EXERCICES sur les lieux géométriques (sauf la parabole)

Exercice 1 :

Identifier le lieu décrit par chacune des équations suivantes :

a) $3x - 2y + 7 = 0$

b) $3x^2 - y^2 + 5 = 0$

c) $4x^2 = 1 - 4y^2$

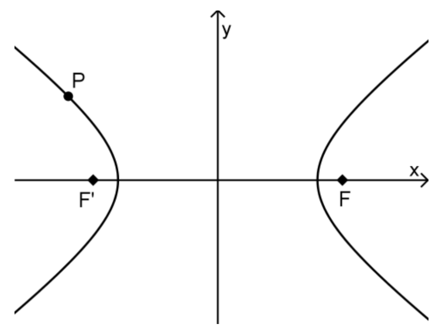
d) $\frac{3x^2}{5} + \frac{1}{2}y^2 = 3$

Exercice 2 :

Soit le cercle d'équation $x^2 + y^2 - 12 = 0$. Sachant que ce cercle passe par les foyers et par 2 des sommets d'une ellipse d'axe focal vertical, déterminer l'équation de cette ellipse.

Exercice 3 :

Déterminer la règle de l'hyperbole suivante sachant que ses foyers ont pour coordonnées (±10, 0) et que d(P, F') = 7 et d(P, F) = 23.



Exercice 4:

Soit l'hyperbole d'équation $\frac{y^2}{144} - \frac{x^2}{25} = 1$. Sachant qu'un cercle est centré au foyer supérieur de l'hyperbole et qu'il est tangent aux deux asymptotes :

a) Faire un croquis de la situation.

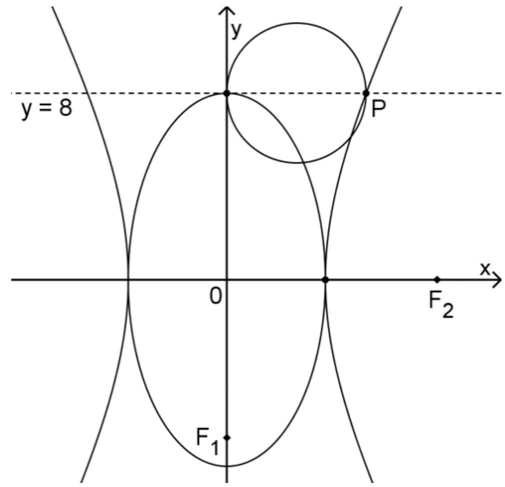
b) Déterminer les coordonnées des points de tangence.

c) Déterminer l'équation du cercle.

Calculs…

Exercice 5:

Dans le graphique ci-contre, l'ellipse et l'hyperbole sont centrées à l'origine, le cercle rencontre l'hyperbole au point P(6, 8). Le foyer F_1 de l'ellipse a pour coordonnées $(0, -\sqrt{46})$.



a) Donner l'équation du cercle.

b) Déterminer la mesure du petit axe de l'ellipse.

c) Trouver les coordonnées du foyer F_2 de l'hyperbole.

Exercice 6:

Trouver les coordonnées des points d'intersection des lieux géométriques définis par ces équations :

a) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{25}=1$ et $2x-y-3=0$

b) $\frac{x^2}{28}-\frac{y^2}{28}=1$ et $y=-x$

c) $x^2-y^2=1$ et $2x+y+5=0$

d) $\frac{x^2}{11}+\frac{y^2}{18}=1$ et $y=\sqrt{18}$

Calculs…

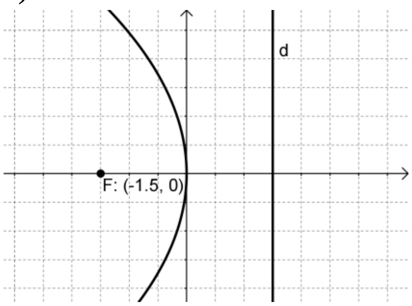
La parabole

Exercice 1:

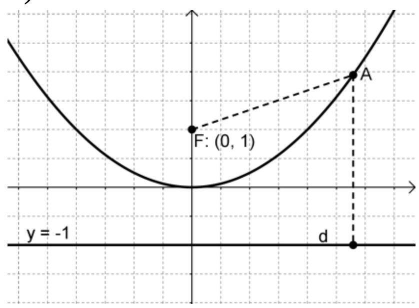
Pour chaque situation donnée, trouver :

1) l'équation de la parabole;
2) l'équation de l'axe de symétrie.

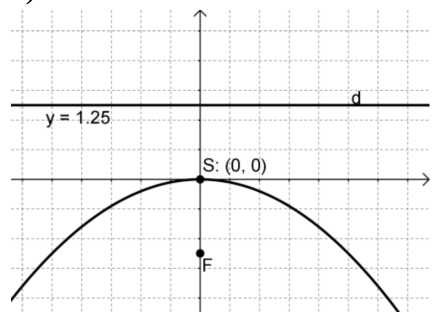
a)



b)



c)



Exercice 2:

Trouver l'équation de la parabole ayant son sommet au point (0, 0) et dont le foyer F ou la directrice d correspond à :

a) $d : x = \frac{-1}{2}$ b) $F\left(0, \frac{3}{8}\right)$ c) $d : y = \frac{7}{4}$

Exercice 3:

L'équation d'une parabole ayant son sommet à l'origine étant donnée, déterminer :

1) l'équation de son axe de symétrie;
2) les coordonnées du foyer;
3) l'équation de la directrice.

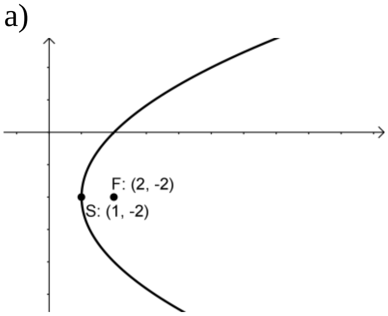
a) $y^2 = -8x$ b) $x^2 = 3y$ c) $x^2 = y$ d) $y^2 = \frac{5x}{2}$ e) $2x^2 = -y$

Exercice 4:

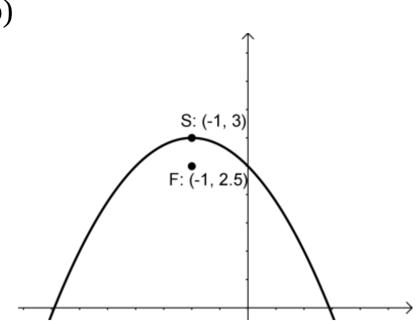
Pour chaque parabole tracée, trouver :

1) la valeur de la distance focale
2) l'équation de cette parabole.

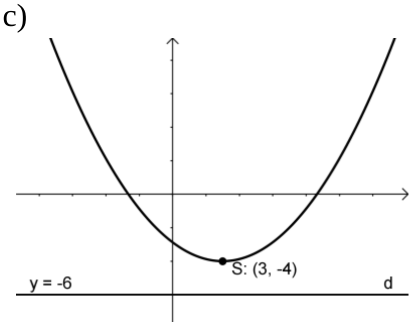
a)



b)



c)



Calculs…

Exercice 5:

Trouver l'équation de la parabole dont :

a) Le sommet est au point (-2, 5) et le foyer, au point $\left(\frac{-5}{2}, 5\right)$.

b) Le sommet est au point (4, -6) et la directrice a pour équation $y = \frac{-15}{2}$.

c) Le foyer est au point (2, 1) et la directrice a pour équation $y = 5$.

d) Le foyer est au point (-4, 3) et la directrice a pour équation $x = -6$.

e) Le foyer est au point (0, 0) et la directrice a pour équation $x = 3$.

Exercice 6:

L'équation de la parabole étant donnée, trouver :

1) les coordonnées du sommet;
2) l'équation de l'axe de symétrie;
3) les coordonnées du foyer;
4) l'équation de la directrice.

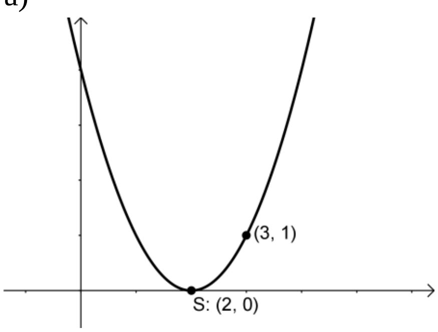
a) $(y-1)^2 = 4(x-2)$ b) $(x+5)^2 = -8(y-2)$ c) $(x-2)^2 = -6(y-4)$

d) $(y+3)^2 = -3x$ e) $(x-2)^2 = 3(y+4)$ f) $(y+2)^2 = -6(x-3)$

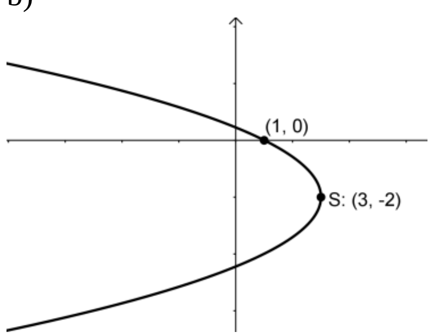
Exercice 7:

Quelle est l'équation de chacune des paraboles suivantes?

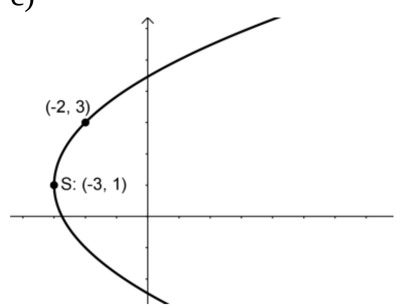
a)



b)



c)



Exercice 8:

Soit la parabole d'équation $(y-2)^2 = -3(x-3)$. Déterminer les coordonnées des points de rencontre de cette parabole avec l'axe des abscisses et celui des ordonnées, dans le plan cartésien.

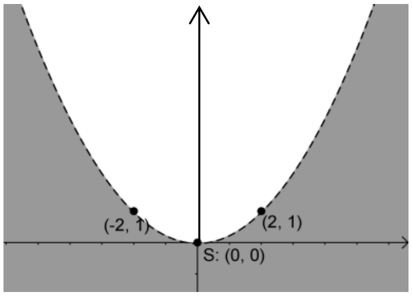
Exercice 9:

Une parabole a son sommet situé au point (3, 1) du plan cartésien et son foyer, au point (3, 2). Trouver la valeur manquante dans les couples suivants : (0, y) et (x, 5).

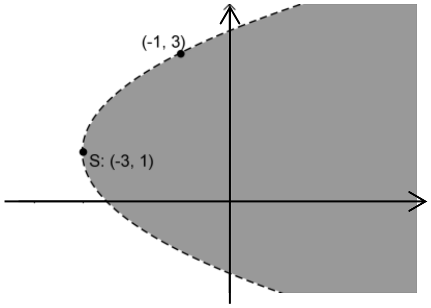
Calculs…

Exercice 10:
Quelle relation décrit la région représentée?

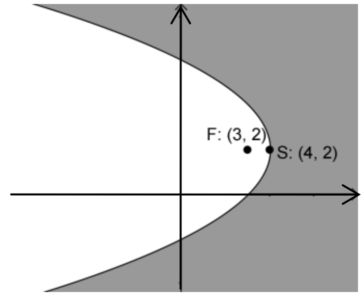
a)



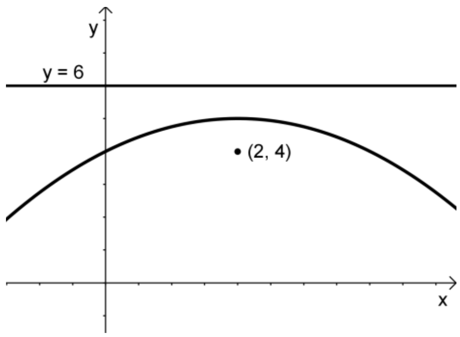
b)



c)



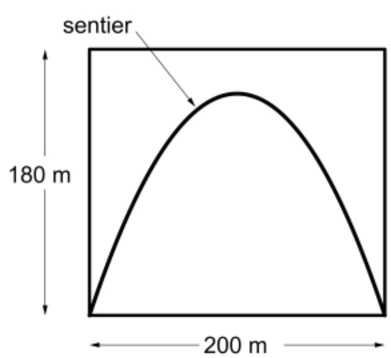
Exercice 11:
Tous les points de la courbe représentée ci-contre sont situés à égale distance du point (2, 4) et de la droite d'équation y = 6.



a) Quelle est l'équation de cette courbe?
b) Indiquer la position des points suivants : sur la parabole, à l'intérieur ou à l'extérieur.
(7, -1) (5, 2) (0, 4) (2, -3) (-4, -4) (-2, 2)

Exercice 12:
On a aménagé un espace vert sur le terrain de 200m sur 180m de l'hôtel de ville de *MathCity*. Le technicien en aménagement représente ce terrain dans le plan cartésien en faisant correspondre son centre à l'origine. Un sentier, dont la trajectoire est parabolique, traverse le parc, et son équation est

$x^2 = \frac{-200}{3}(y - 60)$.



a) Une fontaine sera construite à l'emplacement du foyer. À quelle distance de l'origine sera-t-elle située?
b) Quelle inéquation est associée à la région contenant le point (40, 40)?

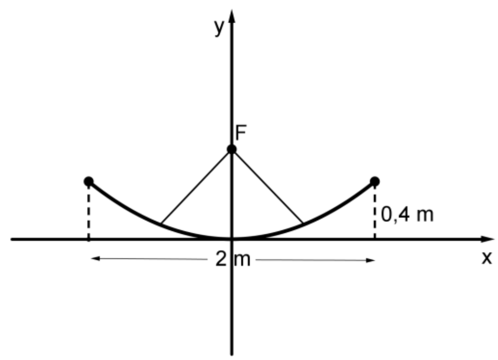
Calculs…

Exercice 13:

Dans le plan cartésien, une région, contenant l'origine, est limitée par une parabole dont le foyer est situé au point (-1, 3). La directrice de cette parabole a comme équation $x = 3$. Déterminer l'inéquation associée à cette région.

Exercice 14:

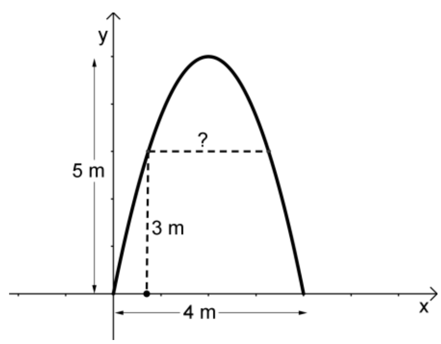
Une antenne parabolique a une largeur de 2m et une hauteur de 0,4m. On fait correspondre le sommet de l'antenne avec l'origine du plan cartésien, tel qu'il est illustré ci-contre. À quelle distance du sommet se situe le capteur (F)?



Exercice 15:

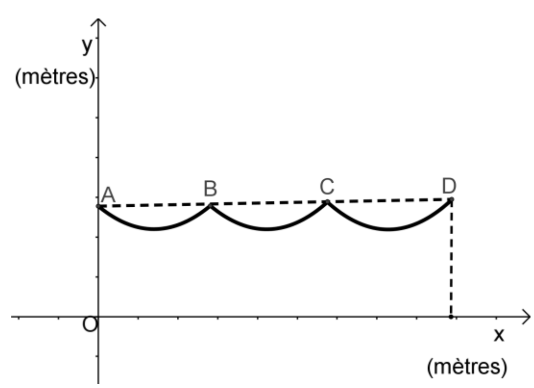
Le pied d'une arche de forme parabolique de 5m de hauteur se situe au point (0, 0) d'un système de coordonnées cartésiennes. La largeur, à la base, est de 4m.

a) Quelle est l'équation de la parabole?
b) Quelle est la largeur, au centième près, de l'arche à une hauteur de 3m?



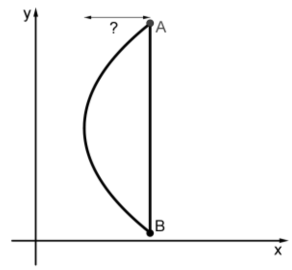
Exercice 16:

Une guirlande est accrochée au mur de la classe, et chacune des courbes s'apparente à une parabole. Stéphane affirme que la courbe AB a comme équation $(x-1,4)^2 = 3,4(y-2,2)$. $\overline{AD}$ représente la largeur de la classe et $\overline{OA}$, sa hauteur. Quelles sont les dimensions de ce mur sachant que la guirlande dessine trois courbes identiques?

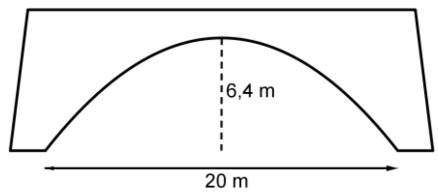


Calculs…

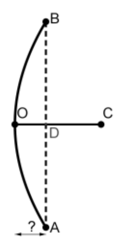
<u>Exercice 17</u>:
Une lentille de forme parabolique a son sommet au point (3, 7) du plan cartésien. La distance entre le sommet et le foyer est de 2,6cm. Sachant que la largeur $\overline{AB}$ est de 13cm, trouve, au dixième près, l'épaisseur de cette lentille.



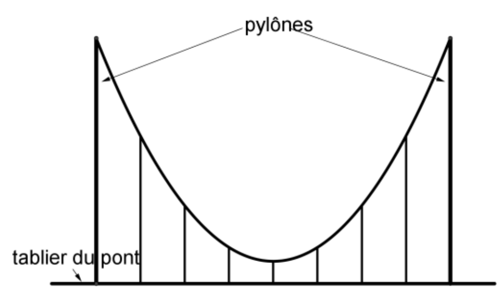
<u>Exercice 18</u>:
La structure d'un viaduc comprend une arche de forme parabolique. La largeur entre les piliers est de 20m. La hauteur libre, au centre, est de 6,4m. Quelle est la hauteur, au dixième près, à 4m du bord?



<u>Exercice 19</u>:
Le capteur (C) d'une antenne parabolique est situé à une distance de 25cm du sommet. L'antenne a une hauteur de 60cm (représentée par AB). Déterminer la largeur (OD) d'une telle antenne. (Note : le capteur est situé au foyer de la parabole.)



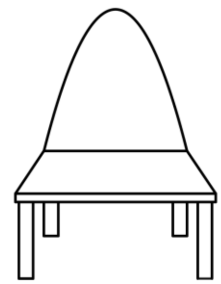
<u>Exercice 20</u>:
Un pont suspendu comprend un câble porteur dont la forme s'apparente à une parabole. Ce câble est fixé au pylône à 22m de hauteur. Le centre de ce câble est situé à une distance de 2m du tablier du pont. La distance entre les deux pylônes sur lesquels le câble porteur est fixé est de 160m. Quelle est la hauteur d'un câble situé à 20m du pylône?



Calculs…

Exercice 21:

Dans une usine de fabrication de meubles, un graphiste a dessiné un modèle de dossier de chaise de forme parabolique. La largeur du dossier, à la base, est de 40cm et sa hauteur, en son centre de 50cm. À l'emplacement du foyer, le graphiste suggère d'apposer une applique. À quelle distance de la base du dossier se situe le foyer?



Méli-mélo de coniques…

Exercice 1 :

Dire si chacune des équations suivantes représente un cercle ou une parabole. S'il s'agit d'un cercle, donner la position de son centre et la mesure de son rayon. Si c'est une parabole, en donner l'équation de la directrice.

Finalement, écrire l'inéquation associée à chaque lieu de manière à ce que le point (-1 , 3) en soit solution.

a) $x^2 + 2x + \frac{1}{2}y + 3 = 0$ b) $4y^2 = x$ c) $3x^2 + 3y^2 - 6x + 12y = 10$

d) $4y^2 - 1 = -4x^2$ e) $y = -2(x+1)^2 - 3$ f) $y^2 + 3x - 4y + \frac{11}{2} = 0$

Exercice 2 : (enrichissement)

Soit la parabole d'équation : $f(x) = -\frac{1}{8}(x+5)^2 - 7$

a) Déterminer l'équation du cercle ayant son centre au foyer de cette parabole et tangent à sa directrice.

b) Déterminer le système d'inéquations tel que P(-6 , -6) soit solution de ce système.

Calculs…

<u>Exercice 3</u> : (ellipses et hyperboles centrées en (h,k))

Soit l'ellipse d'équation : $\dfrac{(x+3)^2}{25}+\dfrac{(y-4)^2}{169}=1$

Détermine l'équation de l'hyperbole dont les sommets passent par les foyers de cette ellipse et dont les équations des asymptotes sont $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{11}{2}$ et $y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2}$

<u>Exercice 4</u>: Un point P se déplace en étant toujours à 20 unités des point (0 , -8) et (0 , 8). Une hyperbole d'axe focal horizontal est tangente au lieu du point P et possède des asymptotes d'équation : $y=\pm\dfrac{1}{6}x$.

a) Détermine les coordonnées possibles du point R $\left(3\sqrt{5}\ ,\ y\right)$ de cette hyperbole.

b) Détermine l'inéquation associée à la région extérieure de l'hyperbole.

<u>Exercice 5</u>:
Déterminer l'équation de la plus simple ellipse inscrite dans un rectangle de 28cm sur 22cm.

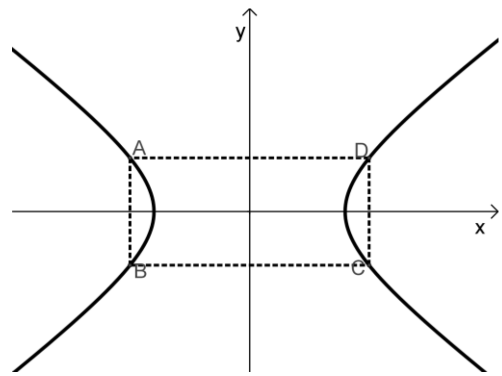
<u>Exercice 6</u>:
Déterminer l'inéquation correspondant à la région intérieure de l'hyperbole centrée à l'origine dont la distance entre les deux sommets situés sur l'axe des x est de 4m, si l'équation d'une des asymptotes est $y=2x$

Calculs…

Exercice 7:
Déterminer l'inéquation la plus simple pour décrire l'intérieur de la piscine de forme ellipsoïdale dont le petit axe mesure 6 unités et le grand axe, le triple de la mesure du petit axe.

Exercice 8:

Soit l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$. Les segments AB et CD passent respectivement par les foyers de l'hyperbole. Le rectangle ABCD est ainsi formé. Si on trace les diagonales de ce rectangle et qu'on les prolonge, on peut ainsi construire les asymptotes d'une autre hyperbole. Détermine l'équation de cette nouvelle hyperbole sachant que ses sommets sont situés aux mêmes endroits que les foyers de la première.



Exercice 9: (ellipses centrées en (h,k))
Déterminer l'équation du lieu du point P dont la somme des distances aux points K(-11, 4) et L(7, 4) est égale à 30 unités.

Exercice 10: (hyperboles centrées en (h,k))
Déterminer l'équation du cercle tangent aux sommets de l'hyperbole dont l'équation est $9x^2-5y^2+36x+30y-54=0$

Exercice 11: (ellipses centrées en (h,k))
Soit l'ellipse d'équation $\frac{(x+3)^2}{25}+\frac{y^2-8y+16}{169}=1$. Déterminer l'équation de l'hyperbole dont les sommets passent par les foyers de cette ellipse et dont les équations des asymptotes sont $y=0{,}5x+5{,}5$ et $y=-0{,}5x+2{,}5$.

Calculs…

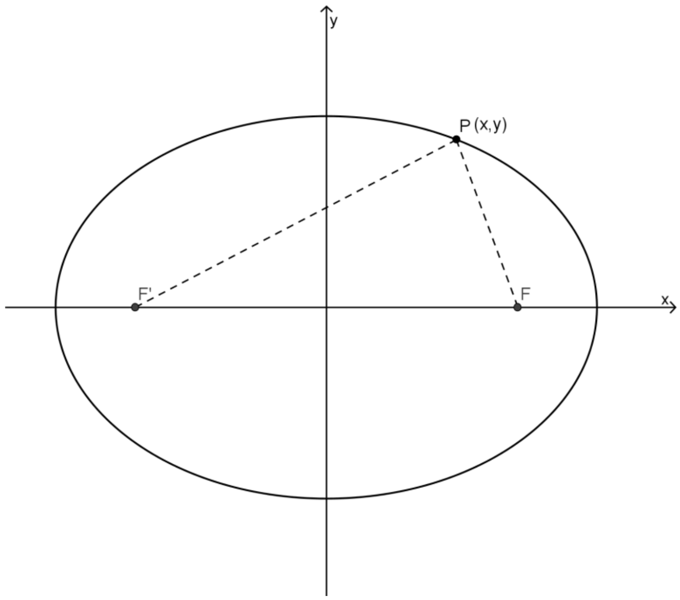
Intersection entre cercle et parabole …

Représenter le système d'équations suivant par un croquis et en calculer les solutions.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x^2 = y + 1 \end{cases}$$

ANNEXE 1 - De la définition à la forme canonique de l'ellipse

Voici le développement algébrique qui permet de trouver l'équation de l'ellipse d'axe focal horizontal centrée à l'origine à partir de sa définition.



Démonstration :

1. $d(P,F)+d(P,F')=2a$ *Par définition*
2. $\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$ *Formule de distance*
3. $\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}$
4. $(x-c)^2+y^2=4a^2+(x+c)^2+y^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$ *Élévation au carré*
5. $x^2-2cx+c^2+y^2=4a^2+x^2+2cx+c^2+y^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$ *Développement des carrés*
6. $-4cx-4a^2=-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$
7. $cx+a^2=a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$
8. $c^2x^2+2a^2cx+a^4=a^2(x^2+2cx+c^2+y^2)$ *Élévation au carré*
9. $c^2x^2+2a^2cx+a^4=a^2x^2+2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2$
10. $c^2x^2+a^4=a^2x^2+a^2c^2+a^2y^2$
11. $(a^2-b^2)x^2+a^4=a^2x^2+a^2(a^2-b^2)+a^2y^2$ *Car $c^2=a^2-b^2$*
12. $a^2x^2-b^2x^2+a^4=a^2x^2+a^4-a^2b^2+a^2y^2$ *Par distributivité*
13. $-b^2x^2-a^2y^2=-a^2b^2$
14. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ *Par division par $-a^2\,b^2$*

ANNEXE 2 – Coniques et fonction

(non élément du programme *Sciences Naturelles 5*)

La fonction demi-cercle

1- Le demi-cercle centré à l'origine

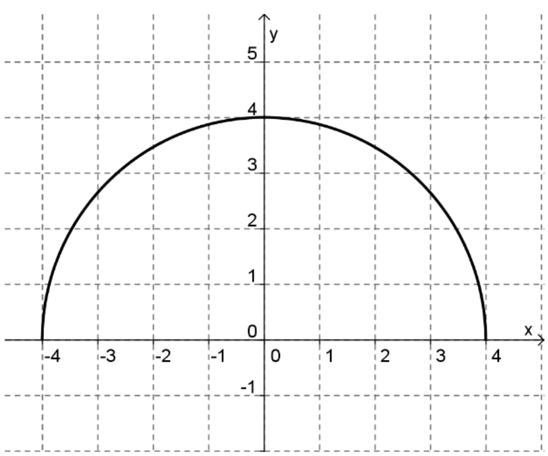
En prenant l'équation canonique d'un cercle centré à l'origine et en isolant *y*, on obtient aisément la règle de la fonction demi-cercle

$$x^2 + y^2 = r^2 \longrightarrow y^2 = r^2 - x^2 \longrightarrow \boxed{y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}}$$

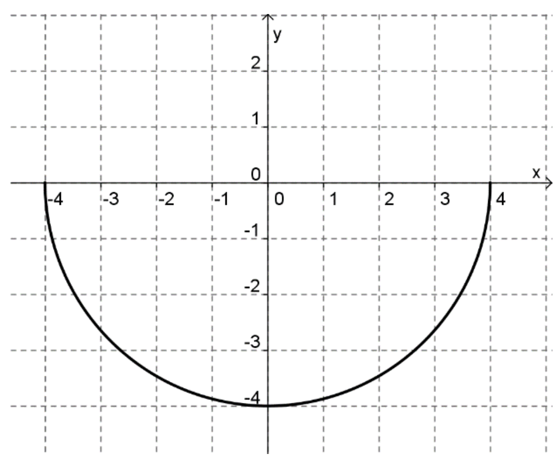
où r^2 représente encore le carré du rayon (comme dans le modèle canonique du cercle et le symbole $\pm$ les deux signe possibles du paramètre *a*.

Exemples :

$f(x) = \sqrt{16 - x^2}$



$g(x) = -\sqrt{16 - x^2}$



2- Le demi-cercle centré en (*h* , *k*)

Quelle surprise ici si je vous dis qu'en prenant l'équation canonique du cercle centré en (*h*,*k*) et qu'en isolant *y* dans ce modèle, on obtient la règle du demi-cercle centré en (*h* , *k*)!

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \longrightarrow (y-k)^2 = r^2 - (x-h)^2$$

$$\longrightarrow y - k = \pm\sqrt{r^2 - (x-h)^2} \longrightarrow \boxed{y = \pm\sqrt{r^2 - (x-h)^2} + k}$$

Exercice : Donner la règle de la fonction demi-cercle *f* ayant son centre au point C $(-3\ ,\ 11)$ et passant par le point $\mathrm{P}(5\ ,\ 5)$.

RÉPONSE : $f(x) = -\sqrt{100-(x+3)^2}+11$

La fonction demi-ellipse

La fonction demi-ellipse est engendrée de la même manière que la fonction demi-cercle, c'est-à-dire en isolant *y* dans le modèle canonique de l'ellipse (centrée à l'origine ou non). Les deux modèles sont les suivants :

1- Demie-ellipse centrée à l'origine

$$y = \pm\sqrt{b^2\cdot\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)} \quad \text{ou encore} \quad y = \pm b\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$$

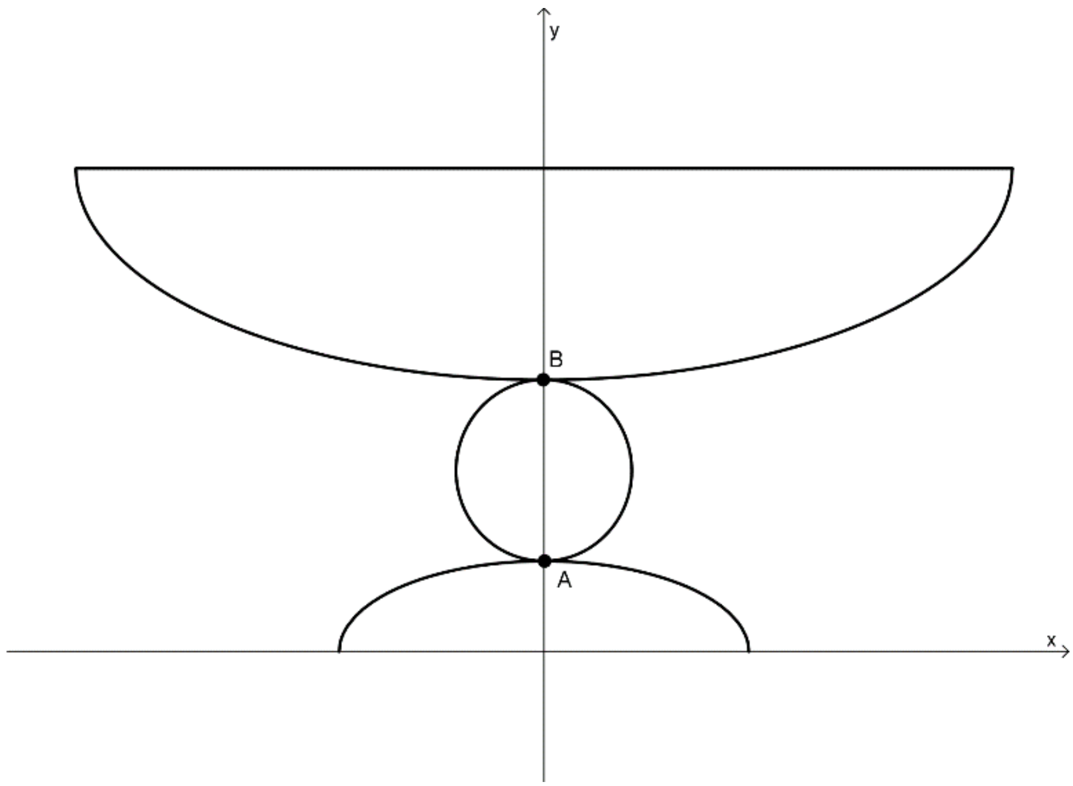
2- Demie-ellipse centrée en (*h* , *k*)

$$y = \pm\sqrt{b^2\cdot\left(1-\frac{(x-h)^2}{a^2}\right)}+k \quad \text{ou encore} \quad y = \pm b\cdot\sqrt{1-\frac{(x-h)^2}{a^2}}+k$$

Note 1 : *a* et *b* représentent respectivement la mesure du demi-axe horizontal et la mesure du demi-axe vertical.
Note 2 : Comme pour le lieu de l'ellipse que nous connaissons, la fonction demi-ellipse peut présenter son axe focal à l'horizontal (lorsque $a > b$) ou à la verticale dans le cas contraire.

Exercice :

Soit le calice à cigüe dont on a représenté le profil dans le plan ci-contre :



De bas en haut, cette représentation est formée :

1- d'une demi-ellipse d'axe focal horizontal qui forme **le pied**;
2- d'un cercle formant **la prise**;
3- d'une seconde demi-ellipse d'axe focal horizontal formant **la coupe.**

Voici quelques renseignements au sujet de ce calice :

- L'axe focal du pied mesure 7 centimètres et les foyers de cette demi-ellipse ont pour coordonnées $\left(\pm\sqrt{10}\ ,\ 0\right)$.
- La prise a un diamètre de 3 centimètres.
- Les points nommés A et B sont des points de tangence entre les courbes.
- Le calice a une hauteur totale de 8 centimètres et sa largeur (maximale) vaut le double de sa hauteur.

Donnez les règles des trois parties constituant ce calice en considérant que le repère cartésien est gradué en centimètres.

Calculs…

RÉPONSES : $f(x)=1{,}5\sqrt{1-\frac{x^2}{3{,}5^2}}$ (pour le pied) ; $x^2 9+(y-3)^2=2{,}25$ (pour la prise)

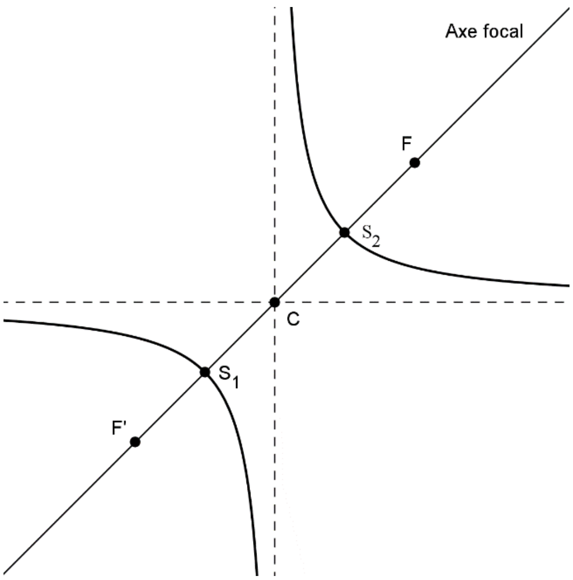
$g(x)=-3{,}5\sqrt{1-\frac{x^2}{64}}+8$ (pour la coupe)

L'hyperbole et la fonction rationnelle

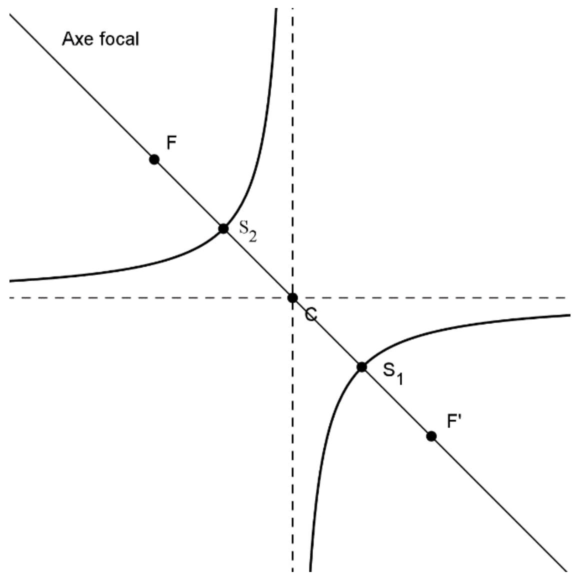
La fonction rationnelle est une hyperbole équilatère, c'est-à-dire que ses asymptotes se croisent à angle droit (voir notes à ce sujet).

Afin de traiter la fonction rationnelle comme un lieu géométrique, il est primordial de pouvoir positionner ses foyers. On sait que l'axe focal de l'hyperbole passe à la fois par son centre et ses deux sommets. Voici deux exemples qui illustrent comment peut se présenter l'axe focal supportant les foyers F' et F dans une fonction rationnelle de centre C et de sommets S_1 et S_2. Les asymptotes sont illustrées en pointillés.

Cas #1



Cas #2



Encore une fois, c'est la relation de Pythagore qui nous permettra de positionner les foyers avec précision, mais cette fois, il faudra être un peu plus astucieux…

Exercice :

Soit la fonction rationnelle d'équation $f(x)=\frac{4}{x}$.

a) Donnez la position exacte des foyers F' et F de la fonction *f*.

RÉPONSES : $F'\left(-2\sqrt{2}\ ,\ -2\sqrt{2}\right)$ et $F\left(2\sqrt{2}\ ,\ 2\sqrt{2}\right)$

b) Soit les points $A\left(8\ ,\ \frac{1}{2}\right)$ et $B(-4\ ,\ -1)$ appartenant à la fonction *f*, démontrez qu'ils vérifient la définition géométrique de l'hyperbole :

$$|d(P\ ,\ F)-d(P\ ,\ F)|=\text{distance entre les sommets}$$

RÉPONSE

Distance entre les sommets $=2\times 2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$ unités.

Vérification avec le point $A\left(8\ ,\ \frac{1}{2}\right)$

$$|d(A\ ,\ F')-d(A\ ,\ F)|=4\sqrt{2}$$

$$\left|\sqrt{(x_A-x_{F'})^2+(y_A-y_{F'})^2}-\sqrt{(x_A-x_F)^2+(y_A-y_F)^2}\right|=4\sqrt{2}$$

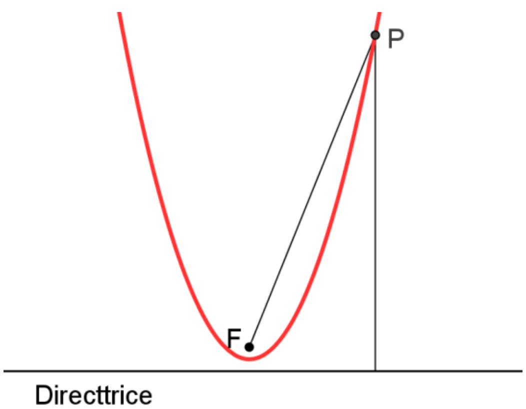
$$\left|\sqrt{\left(8--2\sqrt{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}--2\sqrt{2}\right)^2}-\sqrt{\left(8-2\sqrt{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-2\sqrt{2}\right)^2}\right|=4\sqrt{2}$$

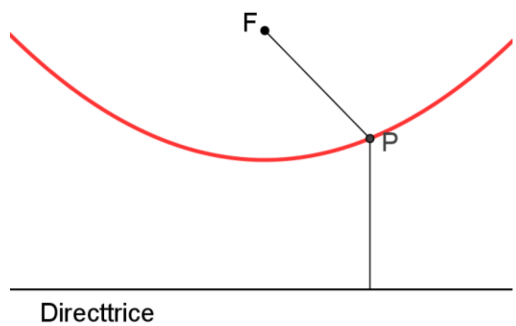
Bien entendu, vérifier cette égalité est bien plus facile à l'aide d'une calculatrice ! Il en est de même avec le point B.

La parabole, la fonction quadratique et la fonction racine carrée

Bien qu'on ne vous l'ait jamais présentée de la sorte, la fonction quadratique possède elle aussi un foyer et une directrice.

Tel que présenté en classe à l'aide de GeoGebra, la distance focale influence la courbure de la parabole, tout comme le paramètre *a* de la fonction quadratique, mais à l'inverse!

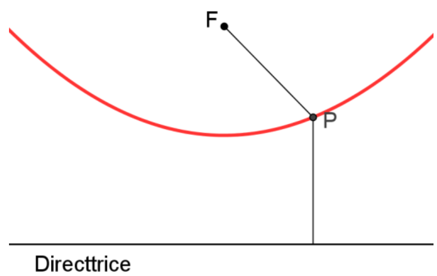
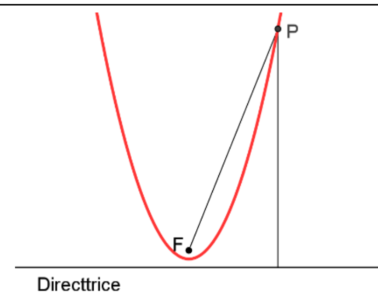




À partir de la règle de la parabole $x^2 = 4cy$, en divisant des 2 côtés de l'égalité par la valeur du coefficient $4c$ on obtient la règle d'une fonction quadratique :

$y = \frac{x^2}{4c}$ qui représente une fonction quadratique du modèle $y = ax^2$ avec $a = \frac{1}{4c}$.

On voit que le coefficient *a* de la fonction quadratique est inversement proportionnel à la distance focale du lieu géométrique. Le tableau suivant résume bien ce phénomène :

Distance focale	**Coefficient *a* de la quadratique**	**Effet sur la parabole**	**Exemple**
AUGMENTE	DIMINUE	S'OUVRE	
DIMINUE	AUGMENTE	SE REFERME	

Il en va de même pour la fonction racine carrée et les paraboles d'axe focal horizontal.

<u>Exercice :</u>

Détermine la position du foyer et l'équation de la directrice de la fonction racine carrée dont la règle est $f(x) = -10\sqrt{x+7} + 16$

RÉPONSE :

Le foyer a pour coordonnées $F(18\ ,\ 16)$ et l'équation de la directrice est $x = -32$

SUDOKU MATHÉMATIQUE (à compléter à la page suivante)

Déterminer les valeurs de départ en vous basant sur les indices fournis et complétez la grille!

	T.V. d'une asymptote d'une hyperbole équilatère				La valeur de $a - h + k$ dans $f(x)=\frac{-7x-193}{x+26}$	Degré du polynôme $f \bullet g$ si $\begin{cases} f(x)=x+5 \\ g(x)=-3x^2-7 \end{cases}$		Rayon du cercle : $x^2+(y-1)^2=49$
Abscisse d'intersection $\begin{cases} y-\frac{55}{7}=\frac{-3}{7}x \\ 0=\frac{2x}{9}-y+2 \end{cases}$	Ordonnée du foyer supérieur de l'hyperbole $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=-1$							
		Taux de variation de la baladeuse: Z+33=24x + 3y		Le nombre de solutions de l'équation $0=2x^2+24x+72$				
	Distance entre les foyers de $\frac{14x^2}{30}+y^2=14$	Asymptote verticale de $f(x)=\frac{-1}{x-1}+2$						
Minimum de la fonction $f(x)=7+\frac{1}{4}\sqrt{2+x}$			Limite inférieure du domaine de $f(x)=-0.5\sqrt{-8+2x}$		Nombre de points à coordonnées entières sur le segment AB si A(-8,5) et B(7,-5)			Distance entre le foyer de $x^2+8y=0$ et sommet de $f(x)=-\|x+8\|$
						Distance entre les zéros de $f(x)=-2\|-x+1\|+6$	Ordonnée à l'origine de $21y-42=7x$	
				Distance entre les solutions de $\frac{4}{25}(x+6)^2=1$		Nombre de contraintes formant un polygone fermé à 7 sommets		
							Zéro de f Si $f(x)=\frac{-6x+48}{x+24}$	Nombre de zéros d'une fonction valeur absolue lorsque $a \bullet k<0$
Solution de $(g \circ f)(x)=2$ Si $f(x)=2x-5$ $g(x)=-x+7$		2e nombre premier	Mesure du rayon du cercle d'équation $x^2+y^2-6x+10y+30=0$				Nombre de foyer(s) du lieu d'un point dont la distance entre une droite et un point est constante	

Faites vos calculs ici…
